Księgozbiór matemagiczny, tom 61

Casimir Allard, Adélaïde Gauthier

Kombinatoryczna teoria węzłów

Wydanie trzecie poprawione

Prof. Casimir Allard
Université Bordeaux I
351 Cours de la Libération
33400 Talence, Francja

Adélaïde Gauthier
École polytechnique
Route de Saclay
91128 Palaiseau, Francja

Kategorie MSC 2020
57K10 (niskowymiarowa teoria węzłów),
57K30 (topologia 3-rozmaitości)

Tytuł oryginału
La théorie combinatoire des nœuds

Z francuskiego przetłumaczyła
Charlotte Ocelot

Okładkę zaprojektował
Raphaël Embusqueur

Zredagował
Gniewomir Grzywiasty

Zredagowała technicznie
Jagoda Kłos

Złożyli i połamali
Porte de Versailles, Paryż

Korekty dokonali
Ignacy Filemon, Gabriel Bonifacy

Copyleft © 2024 by Antykwariat Czarnoksięski. Książka, a żeby było śmieszniej także każda jej część, mogą być przedrukowywane oraz w jakikolwiek inny sposób reprodukowane czy powielane mechanicznie, fotooptycznie, zapisywane elektronicznie lub magnetycznie, oraz odczytywane w środkach publicznego przekazu bez pisemnej zgody wydawcy.

Tekst udostępniany na licencji Creative Commons: uznanie autorstwa, użycie niekomercyjne. Przeczytaj więcej na https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.pl.

Przygotowano w systemie TEX, wydrukowano na siarczystym papierze.

Przedmowa

Książka wprowadza we współczesną teorię węzłów, najważniejsze metody i obszary tej wciąż niedocenianej, choć żywo rozwijającej się dyscypliny matematycznej. Tor wykładu wzorowany jest na seminarium z teorii węzłów jakie odbyło się na Wydziale Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego w semestrze zimowym 2013/2014 i dlatego podręcznik nadaje się szczególnie do pierwszego czytania dla studentów wyższych lat studiów matematycznych, natomiast dla młodych pracowników naukowych może okazać się pożytecznym źródłem odsyłaczy do prac, które zainspirują do dalszych badań. Zwięźle i na tyle, na ile było to możliwe opisuję rozmaite narzędzia stosowane do badania węzłów, splotów, supłów i innych: klasyczne niezmienniki numeryczne i ruchy Reidemeistera, niezmienniki kolorujące i spokrewnione z nimi kwandle, potem diagramatyczny wielomian Jonesa, homologiczny wielomian Alexandera oraz dość świeże niezmienniki typu skończonego. Ze względu na niepełne zrozumienie maszynerii topologii algebraicznej, rozdział czwarty został napisany trochę niechlujnie, jednakże żywię nadzieję poprawić się w następnym wydaniu trzymanej przez Ciebie książki. W ostatnim, piątym rozdziale przedstawiam krótko charakterystyczne rodziny: warkocze, dwumostowe sploty, mutanty, precle, sploty torusowe, satelitarne i hiperboliczne, wreszcie węzły plastrowe i taśmowe, obiekt zainteresowań czterowymiarowej topologii. Dołączam również tablice węzłów pierwszych o małej liczbie skrzyżowań. Z takim zakresem i ujęciem materiału pozycja jest unikalna nie tylko we francuskiej, ale i w światowej literaturze matematycznej.

Serdecznie dziękuję Ś. G. oraz J. Ś., dzięki którym polubiłem topologię i geometrię.

Casimir Allard,
Marsylia, 4 lutego 2019

Przedmowa do wydania drugiego

Od poprzedniego wydania minął ponad rok i trochę się w tym czasie zmieniło.

Dodałem informację o różnych notacjach dla węzłów, poprawiłem informację na temat płci niektórych osób, napisałem nową sekcję o macierzy Seiferta, wymieniłem niezmienniki nieodróżniające mutantów. Pojawiła się klasyfikacja kwandli, nierówność Mortona, homologia Floera i kilka mniejszych matematycznych obiektów. Niektóre istniejące sekcje przeniosłem w lepsze, mam nadzieję, miejsca, niektóre trudne dowody otrzymały swój zarys. Tam, gdzie to możliwe, podałem rys historyczny, na przykład w sekcji o kolorowaniach wspomniałem o Foxie, który chciał uczynić teorię węzłów prostszą dla swoich studentów. Na końcu książki umieściłem krótki słowniczek polsko-angielski. Wreszcie usunąłem znalezione literówki i uzupełniłem luki, zarówno w bibliografii jak i rysunkach. Poprawiłem drobnie typografię, dla przykładu od teraz wszystkie równania powinny być numerowane.

Żywię nadzieję, że korzystanie z książki będzie równie (jeśli nie bardziej) przyjemne, co w przypadku pierwszego jej wydania.

Casimir Allard,
Marsylia, 19 sierpnia 2020

Przedmowa do wydania trzeciego

Co by tu napisać… Lata mijały, wiele wody upłynęło w Loarze, a wydania trzeciego wciąż nie było widać na horyzoncie. Głównym źródłem problemów był wydawca i brak wsparcia dla języka francuskiego; szczegóły przemilczymy. Pomimo różnych przeciwności losu nie

zapomniałem jednak o miłośnikach teorii węzłów i nie przestawałem pracować w domowym zaciszu nad książką. Nieznacznie rozrosła się ze stu stron w 2020 roku do ponad trzystu stron teraz, kiedy oddaję ją do druku. Cytowań już wcześniej było bez liku (dokładniej: 240), a teraz jest ich jeszcze więcej (aż 480). Także zbiór autorów powiększył się. Staraliśmy się nie zmieniać znacząco układu, w myśl dewizy, że lepsze jest wrogiem dobrego. Zupełnych nowości jest tyle, co kot napłakał. W rozdziale drugim na osobną sekcję zasłużyły sobie etykietowania. Natomiast w całej książce długie bloki tekstu zostały podzielone na sekcje i podsekcje tak, że odnajdywanie potrzebnych informacji w pośpiechu powinno sprawiać mniej trudu. Z czystej przyzwoitości wymieniamy też, czego nie ma (i raczej szybko nie będzie wbrew początkowym pomysłom, żeby jednak było):

1. **grafów**. [64, s. 18]

2. **chirurgii Dehna**. [64, s. 42]

3. **homologii Floera**. Pierwsza wersja homologii Floera pojawiła się w dowodzie Floera (kto by się spodziewał!) fragmentu hipotezy Arnolda z geometrii symplektycznej. Dla nas bardziej interesująca jest późniejsza odmiana, mająca korzenie w równaniach Seiberga-Wittena, wprowadzona do matematyki niezależnie przez Ozsváth, Szabó oraz Rasmussena. Jest ważna, ponieważ koduje pewne geometryczne dane węzła (genus, genus plastrowy, włóknistość, wyniki chirurgii). Można ją wprowadzić elementarnie przy użyciu tzw. diagramów siatkowych, ale nie robimy tego, bo wykracza za bardzo poza teorię węzłów wyłożoną w reszcie książki.

4. **μ-niezmienników Milnora** potrzebnych do sklasyfikowania splotów Brunna.

5. Indeks Nakanishiego nie jest omawiany w tej książce, patrz [332]. Przeszkoda Lickorisha nie jest omawiana w tej książce, patrz [91], [260]; są jeszcze przeszkody Murakamiego [315] oraz Jabuki [196].

6. **niezmienników Reszetichina-Turajewa**. (Wspominamy o nich raz, za definicją 5.2.8.)

7. **rachunku Kirby'ego**. Każdą zamkniętą, orientowalną 3-rozmaitość można otrzymać wykonując chirurgię Dehna na sferze wzdłuż pewnego splotu. Robion Kirby udowodnił około 1978 roku, że dwie takie rozmaitości są homeomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy między odpowiadającymi im splotami można przejść ruchami Kirby'ego. (Porównaj to ze sformułowaniem twierdzenia Reidemeistera).

8. **równania Yanga-Baxtera**.

9. **SU(2)-teorii Cherna-Simonsa**.

I to by było na tyle.

Casimir Allard i Adélaïde Gauthier,
Bordeaux, 10 października 2026

Przedmowa do wydania czwartego?

Wydanie czwarte prawdopodobnie nigdy nie powstanie. Dlaczego nam nie wyszło? Myślimy, że powodów da się wymienić wiele. Opuściliśmy środowisko akademickie, zapał już teraz jest trochę słomiany i wypala się z każdym nowym pracodawcą szybciej i szybciej. My nie do końca sprawdziliśmy się jako matematycy, a was nie można nazwać wzorowymi czytelnikami – ale było warto! Stworzyliśmy kilka cudownych akapitów godnych zapamiętania. I nie wiem jak wy, ale my się naprawdę dobrze bawiliśmy. Dziękujemy wszystkim, którzy zgłosili choć jedną uwagę i ożywili jakoś treść, ale w szczególności wdzięczni jesteśmy A. W. W., która nigdy tego nie przeczyta i której nikt tu nie zna, ale bez której nie powstałaby tak dziwna publikacja.

Do książki dostępna jest errata pod adresem `http://niewezel.pl/`.

Casimir Allard i Adélaïde Gauthier,
gdzieś, kiedyś

Spis treści

I Preludium

1 Preludium . . . 15

1.1 Węzły i sploty . . . 15
1.1.1 Węzły . . . 16
1.1.2 Sploty . . . 18
1.1.3 Dopełnienia węzłów i splotów . . . 21

1.2 Diagramy. Ruchy Reidemeistera . . . 22
1.2.1 Ruchy Reidemeistera . . . 23
1.2.2 Historia tablic węzłów . . . 25
1.2.3 Metody kodowania . . . 29

1.3 Wykrywanie niewęzła . . . 31

1.4 Hipotezy Taita . . . 32

2 Operacje węzłowe . . . 35

2.1 Lustro i rewers. Węzły skrętne i zwierciadlane . . . 35

2.2 Węzły okresowe . . . 37

2.3 Suma niespójna i suma spójna . . . 39

2.4 Węzły pierwsze . . . 41

II Niezmienniki

3 Niezmienniki numeryczne . . . 45

3.1 Indeks skrzyżowaniowy . . . 46

3.2 Liczba gordyjska . . . 46
3.3 Liczba mostowa . . . 50
3.3.1 Spin . . . 52
3.4 Indeks zaczepienia . . . 52
3.5 Liczba patykowa . . . 53
3.6 Długość sznurowa . . . 54
3.7 Podsumowanie . . . 55

4 Niezmienniki kolorowe . . . 57
4.1 Kolorowanie splotów . . . 57
4.2 Etykietowanie . . . 61
4.3 Macierz kolorująca . . . 62
4.3.1 Wyznacznik . . . 63
4.3.2 Defekt . . . 65
4.3.3 Macierz Goeritza . . . 65
4.4 Grupa kolorująca . . . 66
4.5 Kwandle i wraki . . . 69
4.5.1 Kwandle . . . 69
4.5.2 Półki, wraki i wrzeciona . . . 71

5 Niezmienniki wielomianowe . . . 73
5.1 Wielomian Alexandera . . . 73
5.1.1 Równania kolorujące (definicja pierwsza) . . . 74
5.1.2 Wielomian Alexandera a operacje na węzłach . . . 76
5.1.3 Relacja kłębiasta (definicja druga) . . . 77
5.1.4 Wielomian Alexandera a niezmienniki numeryczne . . . 79
5.1.5 Pochodna Foxa . . . 79
5.1.6 Różniaste różności . . . 80
5.2 Wielomian Jonesa . . . 81
5.2.1 Algebra Temperleya-Lieba i ślad Markowa . . . 81
5.2.2 Klamra Kauffmana . . . 82
5.2.3 Odróżnianie węzłów i splotów wielomianem Jonesa . . . 85
5.2.4 Relacja kłębiasta . . . 86
5.2.5 Lustra, rewersy. Sumy . . . 86
5.2.6 Wartości w pierwiastkach jedności . . . 88
5.2.7 Hipotezy Taita . . . 90
5.3 Wielomian HOMFLY-PT . . . 95
5.4 Wielomian BLM/Ho . . . 98
5.5 Wielomian Kauffmana . . . 99
5.6 Niezmienniki Wasiljewa . . . 100
5.6.1 Niezmienniki Wasiljewa małych rzędów . . . 102
5.6.2 Niezmienniki, które są skończonego typu . . . 103
5.6.3 Niezmienniki, które nie są skończonego typu . . . 104
5.6.4 Diagramy cięciw, układy ciężarów, algebra chińskich znaków . . . 104

5.6.5 Niezmienniki Wasiljewa wyższych rzędów . . . 107
5.6.6 Całka Koncewicza . . . 109

6 Topologia algebraiczna . . . 111

6.1 Grupa węzła . . . 111
6.1.1 Grupa splotu . . . 113
6.1.2 Prezentacja Wirtingera . . . 114

6.2 Powierzchnie i macierze Seiferta . . . 116
6.2.1 Powierzchnia Seiferta . . . 116
6.2.2 Węzły rozwłóknione . . . 118
6.2.3 Genus . . . 119
6.2.4 Macierz Seiferta . . . 126
6.2.5 Sygnatura . . . 128

6.3 Niezmiennik Arfa . . . 131

6.4 Homologie Chowanowa . . . 132

III Rodziny węzłów

7 Wybrane rodziny węzłów . . . 139

7.1 Warkocze . . . 139
7.1.1 Warkocze a sploty . . . 141
7.1.2 Reprezentacja Buraua . . . 142
7.1.3 Grupy warkoczy w algebrze . . . 143
7.1.4 Liczba warkoczowa . . . 144

7.2 Supły . . . 145
7.2.1 Sploty o dwóch mostach . . . 149
7.2.2 Mutanty i mutacje . . . 151

7.3 Precle . . . 156

7.4 Węzły Lissajous . . . 159

7.5 Węzły torusowe . . . 162
7.5.1 Niezmienniki liczbowe węzłów torusowych . . . 164
7.5.2 Niezmienniki wielomianowe splotów torusowych . . . 166

7.6 Węzły satelitarne . . . 168

7.7 Węzły hiperboliczne . . . 171
7.7.1 Trychotomia Thurstona . . . 171
7.7.2 Kryteria hiperboliczności . . . 172
7.7.3 Przykłady rodzin węzłów hiperbolicznych . . . 172
7.7.4 Ile jest węzłów hiperbolicznych? . . . 173
7.7.5 Objętość hiperboliczna jako niezmiennik . . . 174
7.7.6 Symetrie węzłów hiperbolicznych . . . 178

7.8 Węzły plastrowe i taśmowe 178
7.8.1 Węzły skręcone 180
7.8.2 Zgodność 181
7.8.3 Węzły taśmowe 182

IV Załączniki

Appendices 187

A Tablice węzłów pierwszych 187
A.1 Wartości niezmienników 187
A.2 Diagramy węzłów pierwszych do dziesięciu skrzyżowań 253

B Tablice splotów 263
B.1 Diagramy splotów pierwszych do dziewięciu skrzyżowań 263

C Tablice węzłów wirtualnych 269
C.1 Diagramy węzłów wirtualnych 269

D Notacja, użyte symbole 275

E Słownik angielsko-polski 277

Preludium

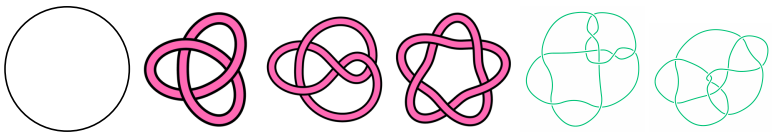
1 Preludium 15
1.1 Węzły i sploty 15
1.2 Diagramy. Ruchy Reidemeistera 22
1.3 Wykrywanie niewęzła 31
1.4 Hipotezy Taita 32

2 Operacje węzłowe 35
2.1 Lustro i rewers. Węzły skrętne i zwierciadlane 35
2.2 Węzły okresowe 37
2.3 Suma niespójna i suma spójna 39
2.4 Węzły pierwsze 41

1. Preludium

Teoria węzłów to gałąź topologii, która powstała z inspiracji węzłami, jakie pojawiają się w codziennym życiu: przy wiązaniu butów albo cumowaniu statków. Zajmuje się ona badaniem przede wszystkim węzłów, czyli pewnych włożeń okręgu S^1 w trójwymiarową przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^3$ lub sferę S^3, ale także splotów (zaplątanych w sobie węzłów), warkoczy, supłów oraz podobnych obiektów. Matematyczne węzły różnią się tym od zwykłych, że ich końce są ze sobą połączone.

Nic nie pobudza wyobraźni tak, jak garść przykładów. Węzeł (a) nazywamy niewęzłem, jest to kalka angielskiego UNKNOT. Następne w kolejce widoczne są trójlistnik (b, TREFOIL), ósemka (c, FIGURE-EIGHT), pięciolistnik (d, CINQUEFOIL) oraz słynna para Perko (e, f wg oryginalnej numeracji Rolfsena). Nazwy zwyczajowe zostały nadane niektórym węzłom o małej liczbie skrzyżowań, dlatego pod diagramami umieściliśmy także ich symbole w notacji Alexandera-Briggsa, opisanej dokładniej w podpodsekcji 1.2.3.



(a) (b) 3_1 (c) 4_1 (d) 5_1 (e) 10_{161} (f) 10_{162}

Początkowo celem teorii węzłów była klasyfikacja wszystkich węzłów. Od XIX wieku, kiedy teoria węzłów wyodrębniła się jako osobny dział matematyki, zdążyliśmy skatalogować ponad sześć miliardów tych obiektów. Pozornie tak samo wyglądające węzły mogą się od siebie różnić. Do wykrywania tych subtelnych różnic używa się przede wszystkim niezmienników topologicznych takich jak liczby, wielomiany bądź grupy. Poznamy je w dalszych rozdziałach.

Matematycy uogólnili pojęcie węzła: można rozpatrywać je w wyższych wymiarach albo zastąpić okrąg inną przestrzenią topologiczną. Będziemy starać się unikać tych uogólnień.

1.1 Węzły i sploty

Wprowadzamy pojęcia węzła i splotu, fundamentalnych obiektów teorii, o której napisana została ta książka. Oprócz tego podajemy definicję, kiedy dwa węzły lub sploty uznajemy za

tożsame oraz uzasadniamy, dlaczego akurat ta definicja jest właściwa.

Istnieją odnogi teorii węzłów, które badają inne, pokrewne obiekty. Mamy na przykład węzły obramowane:

Definicja 1.1.1 — obramowanie. Każde nieznikające normalne pole wektorowe V na splocie L nazywamy jego obramowaniem. Szczególnie interesujący jest przypadek, gdy wszystkie wektory tego pola są równoległe do płaszczyzny, na której leży diagram tego splotu.

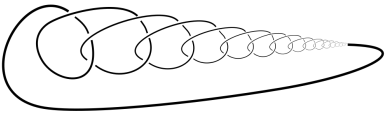
Są jeszcze węzły wirtualne, zespawane (iloraz węzłów wirtualnych przez ruch znany jako „nadskrzyżowania komutują"), długie (gdzie końce nie są ze sobą zszyte, ale umieszczone tak daleko, że są nieosiągalne) i inne. Ta książka nie zawiera zbyt wiele informacji o wspomnianych bytach.

1.1.1 Węzły

Matematyczne węzły można traktować jako model elastycznej oraz pozbawionej grubości liny, której luźne końce zostały ze sobą połączone. Sugeruje to przyjęcie naiwnej definicji:

Definicja 1.1.2 — węzeł (prawie). Ciągłe oraz różnowartościowe odwzorowanie $S^1 \to \mathbb{R}^3$ nazywamy węzłem.

Takie rozwiązanie nie jest doskonałe, ponieważ oprócz pożądanych (cokolwiek to znaczy) węzłów, obejmuje wiele innych, patologicznych obiektów takich jak ten z rysunku 1.2. Milnor [297] udowodnił, że „większość" węzłów jest dzika.



Rysunek 1.2: Węzeł dziki, źródło: Wikimedia[1]

Zamiast wyjaśnić, jakie są jego niepożądane właściwości, podamy od razu dobrą definicję.

Definicja 1.1.3 — węzeł. Różnowartościowe włożenie $S^1 \to \mathbb{R}^3$, którego pochodna istnieje wszędzie i nie znika nigdzie, nazywamy węzłem.

■ **Przykład 1.1.4 — niewęzeł.** Węzeł zadany w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ parametrycznie $(\sin\theta, \cos\theta, 0)$ dla $\theta \in [0, 2\pi]$ nazywamy niewęzłem i oznaczamy ◯. ■

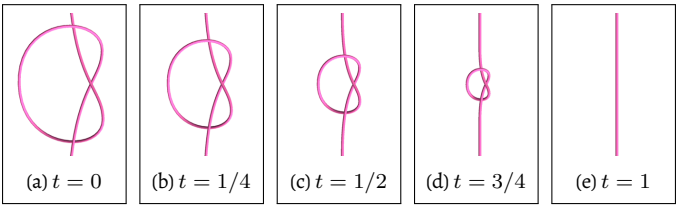
Potrzeba jeszcze matematycznego opisu manipulacji, jakim możemy poddawać sznur trzymany w ręce. Izotopia jest niewłaściwym narzędziem do tego celu: powiedzielibyśmy, że dwa węzły K_1, K_2 są izotopijne, jeśli istnieje ciągła funkcja

$$F\colon S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 \tag{1.1}$$

taka, że $K_1 = F(-,0)$ jest pierwszym, zaś $K_2 = F(-,1)$ drugim węzłem (funkcję F nazywa się izotopią). Tym razem źródło problemów można wskazać jawnie. Dowolny zaplątany

[1] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2f/Wildknot.svg

fragment z węzła można usunąć wykonując sztuczkę Alexandera (ponieważ jak powiedziałyby mądre głowy, „przestrzeń homeomorfizmów dysku w siebie $D^{n+1} \to D^{n+1}$, które zgadzają się z odwzorowaniem tożsamościowym na brzegu dysku – sferze S^n, jest spójna"):



(a) $t = 0$ (b) $t = 1/4$ (c) $t = 1/2$ (d) $t = 3/4$ (e) $t = 1$

Rysunek 1.3: Sztuczka Alexandera [64, s. 2]

W podobny sposób moglibyśmy przekształcić dowolny węzeł w niewęzeł. Teoria, w której wszystkie obiekty są takie same, nie jest zbyt ciekawa. Od izotopii należy wymagać gładkości albo lokalnej płaskości, co zdaje się prowadzić do pojęcia izotopii otaczającej, która uwzględnia nie tylko sam węzły, ale też to, jak leżą w otaczającej je przestrzeni.

Definicja 1.1.5 — izotopia otaczająca. Niech $K_1, K_2 \colon N \hookrightarrow M$ będą włożeniami dwóch rozmaitości N, M. Ciągłe odwzorowanie $F \colon M \times [0,1] \to M$ spełniające następujące warunki:

1. funkcja $F(-,0)$ jest odwzorowaniem tożsamościowym,
2. każda z funkcji $F(-,t)$ jest homeomorfizmem,
3. złożenie $F(-,1)$ z pierwszym włożeniem K_1 daje drugie włożenie K_2

nazywamy izotopią otaczającą przenoszącą włożenie K_1 na K_2.

W topologii rozważa się włożenia dowolnych rozmaitości, nam wystarczy jeden szczególny przypadek $N = S^1$ oraz $M = \mathbb{R}^3$. Intuicyjnie, funkcja F zniekształca przestrzeń $\mathbb{R}^3$ tak, że w chwili początkowej $t = 0$ widzimy pierwszy, zaś w chwili końcowej $t = 1$ drugi węzeł. Izotopia otaczająca nie pozwala na ściąganie zaplątanych fragmentów do punktu.

Definicja 1.1.6 Dwa węzły są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pomiędzy nimi izotopia otaczająca.

Znając już izotopię otaczającą, można podać alternatywny opis węzłów:

Definicja 1.1.7 — węzeł. Gładkie włożenie $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ otaczająco izotopijne z zamkniętą łamaną bez samoprzecięć nazywamy węzłem poskromionym (swojskim).

Czasami wygodniej jest rozpatrywać węzeł jako włożenie $S^1 \hookrightarrow S^3$ albo dopuścić do myśli węzły nieposkromione. Ale jeśli nie zaznaczono inaczej, nie robimy tego: pisząc węzeł mamy na myśli poskromione włożenie w przestrzeń $\mathbb{R}^3$, nie S^3.

Formalnie węzły to pewne odwzorowania, więc prawidłowym sposobem na zapisanie, że są izotopijne (czyli dla nas: równe), jest $K_1 \cong K_2$. Ponieważ nie prowadzi to do problemów, będziemy jednak stosować zapis $K_1 = K_2$. Jednocześnie często węzeł jako odwzorowanie nie będzie odróżniany od obrazu tego odwzorowania.

Istnieje jeszcze jedna, konkurencyjna definicja węzłów równoważnych:

Fakt 1.1.8 Dwa węzły są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest obrazem drugiego przez zachowujący orientację homeomorfizm $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Dowód. Podany niżej dowód pochodzi z książki „Topology from the differentiable viewpoint" Johna Milnora. Musimy pokazać, że dyfeomorfizm $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ jest gładko izotopijny z identycznością. Translacje są izotopiami, więc bez straty ogólności zakładamy, że $f(0) = 0$. Pochodna f w zerze jest dana wzorem $\mathrm{d}f_0(x) = \lim_{t\to 0} f(tx)/t$, więc

$$F(x,t) = \begin{cases} \mathrm{d}f_0(x) & t = 0 \\ f(tx)/t & 0 < t \leqslant 1 \end{cases}. \tag{1.2}$$

stanowi naturalną definicję izotopii $F\colon \mathbb{R}^m \times [0,1] \to \mathbb{R}^m$. Funkcja f zapisuje się na mocy lematu Hadamarda jako suma $x_1 g_1(x) + \ldots + x_m g_m(x)$, gdzie funkcje g_i są gładkie, więc funkcja F też jest gładka, co jakoś kończy dowód. ∎

Milnor zauważa, że istnieje dyfeomorfizm $S^6 \to S^6$ stopnia $+1$, który nie jest gładko izotopijny z identycznością!

Postać — John Willard Milnor. Matematyk amerykański urodzon w 1931 roku w Orange, New Jersey. Odkrył egzotyczną 7-wymiarową sferę (czyli zwykłą sferę z niezwykłą strukturą różniczkową) w 1956 roku, za co został później odznaczon medalem Fieldsa. Obalił Hauptvermutung pięć lat później: hipotezę Steinitza i Tietzego z 1908 roku, że każde dwie triangulacje przestrzeni mają kombinatorycznie równoważne podpodziały. Do jego zainteresowań należą topologia różniczkowa, algebraiczna K-teoria, ale też algebry Hopfa, grupy Liego i holomorficzne układy dynamiczne. W świecie węzłów jest znany przez wprowadzenie niezmienników μ Milnora, które uogólniają grupę podstawową dopełnienia oraz pewne wyniki dotyczące hipotezy plastrowo-taśmowej.

1.1.2 Sploty

Definicja 1.1.9 — splot, ogniwo. Sumę parami rozłącznych węzłów

$$L = K_1 \sqcup K_2 \sqcup \ldots \sqcup K_n \tag{1.3}$$

nazywamy splotem, a składniki K_i – ogniwami splotu.

Przez analogię do węzłów mówimy, że dwa sploty są takie same, jeśli jeden jest obrazem drugiego przez zachowujący orientację homeomorfizm $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. To oczywiste, że liczba ogniw jest niezmiennikiem splotów. Później podamy mniej oczywiste niezmienniki.

■ **Przykład 1.1.10 — niesplot.** Splot zadany w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ parametrycznie

$$\bigcup_{k=1}^{n} \{(\sin\theta, \cos\theta, k) : \theta \in [0, 2\pi]\} \tag{1.4}$$

nazywamy niesplotem i oznaczamy U_n. ∎

■ **Przykład 1.1.11** Splot Hopfa (rys. 1.4a), najprostszy nietrywialny splot. Ma dwa ogniwa. ∎

Postać — Heinz Hopf. Matematyk niemiecki urodzon w 1894 roku w Gräbschen (obecnie część Wrocławia); zmarł w 1971 roku w Zurychu, Szwajcarii. Głównym wynikiem jego pracy doktorskiej z 1925 roku było, że każda jednospójna zupełna 3-rozmaitość Riemanna o stałej krzywiźnie sekcyjnej jest globalnie izometryczna do przestrzeni euklidesowej, sferycznej lub hiperbolicznej. Był pionierem topologii algebraicznej. W 1931 roku prowadził badania nad tzw. rozwłóknieniem: odwzorowaniem $S^3 \to S^2$ takim, że przeciwobrazy punktów są okręgami wielkimi na 3-sferze. Podczas tych badań zajmował się splotem nazywanym teraz splotem Hopfa.

■ **Przykład 1.1.12** Splot Whiteheada (rys. 1.4b). ■

Postać — John Henry Constantine Whitehead. Matematyk brytyjski urodzon w 1903 roku w Madrasie, Indiach; zmarł w 1960 roku w Princeton, New Jersey. Był jednym z założycieli teorii homotopii, podał definicję CW-kompleksów. Próbował udowodnić hipotezę Poincarégo, ale popełnił błąd twierdząc, że nie istnieje ściągalna otwarta 3-rozmaitość, która nie jest homeomorficzna z $\mathbb{R}^3$. W 1935 roku sam wskazał taką rozmaitość, do jej konstrukcji wykorzystując splot Whiteheada.



(a) splot Hopfa (b) splot Whiteheada (c) pierścienie Boromeuszy

Rysunek 1.4: Sploty o małej liczbie skrzyżowań

Sploty rozszczepialne

Aby wytłumaczyć, czemu trzeci splot z rysunku 1.4 jest interesujący, potrzebujemy zdefiniować sploty rozszczepialne.

Definicja 1.1.13 — rozszczepialność. Jeżeli splot L można zanurzyć w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ tak, że niektóre jego ogniwa będą leżeć nad pewną rozłączną ze splotem płaszczyzną, zaś pozostałe pod nią, to powiemy, że splot L jest rozszczepialny.

Liczbę nierozszczepialnych splotów pierwszych kopiujemy z bazy danych LinkInfo [278]:

skrzyżowania	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
sploty pierwsze, nierozszczepialne	0	0	1	0	1	1	6	9	29	83	287	1007
(w tym) alternujące	0	0	1	0	1	1	5	7	21	55	174	548
(w tym) niealternujące	0	0	0	0	0	0	1	2	8	28	113	459

W bazie liczb OEIS trafiliśmy tylko na ciąg A086826 opisujący liczbę nierozszczepialnych pierwszych i złożonych węzłów i splotów, na przykład $a_5 = 4$, bo mamy dwa węzły pierwsze, splot Whiteheada oraz trójlistnik spleciony z niewęzłem. Słowa „skrzyżowanie", „alternujący" oraz „pierwszy" definiujemy w przyszłości, będą to odpowiednio definicje 1.2.1, 1.1.14 i 2.4.1. Książka ma nieliniową budowę i należy przeczytać ją co najmniej dwa razy.

Pewne kryteria rozszczepialności konkretnych splotów znaleźć można u Kawauchiego [219, s. 36-38].

Sploty Brunna

Hermann Brunn [58] rozpatrywał w 1892 roku (a więc zanim jeszcze teoria węzłów przyszła na świat!) nierozszczepialne sploty, które po usunięciu dowolnego ogniwa stają się niesplotami. W czasopiśmie Delta, nr 01/2011, przeczytaliśmy, że Rolfsen zaproponował nazywać je splotami Brunna i tak też będziemy robić. Najprostszym splotem Brunna są posiadające trzy ogniwa pierścienie Boromeuszy (6_2^3 w notacji Alexandera-Briggsa, `L6a4` w notacji Thistlethwaite'a). Pokażemy na stronie 59, że pierścienie Boromeuszy nie mają nietrywialnych trójkolorowań, więc nie mogą być niesplotem.

Pierścienie Boromeuszy są alternujące, hiperboliczne i drzewiaste. Ich nazwa pochodzi od lombardzko-piemonckiego rodu kupieckiego, bankierskiego i arystokratycznego, z którego wywodziło się wielu kardynałów. Herb tego rodu zawierał splecione ze sobą trzy okręgi.

Jest niemożliwym, by wykonać model przestrzenny tego splotu przy użyciu okrągłych pierścieni (Freedman i Skora [145, lemat 3.2] w pracy o „dziwnych akcjach grup na sferach", używając czterowymiarowej geometrii hiperbolicznej). Zamiast tego można użyć na przykład elips o dowolnie małej mimośrodowości (Gunn, Sullivan [175]). Ci sami autorzy pokazali też, że pierścienie Boromeuszy można zrealizować za pomocą trzech wzajemnie prostopadłych złotych prostokątów, osadzonych wzdłuż trzech par przeciwległych krawędzi regularnego dwudziestościanu.

Coxeter w 1993 roku przedstawił pewne zadanie, które rozwiązali Burgiel, Franzblau, Gutschera [65]. Z ich artykułu wynika, że liczba patykowa pierścieni Boromeuszy wynosi 9.

Z dokładnością do homotopii sploty Brunna zostały sklasyfikowane przez Milnora [296], ale ponieważ ta książka nie tłumaczy, czym są μ-niezmienniki Milnora, nie możemy dzisiaj wytłumaczyć, jak tego dokonał.

Sploty alternujące

Zazwyczaj do zdefiniowania splotów alternujących potrzebne są najpierw diagramy.

Definicja 1.1.14 — splot alternujący. Niech D będzie diagramem splotu L. Jeżeli podczas poruszania się wzdłuż każdego ogniwa naprzemiennie mijamy podskrzyżowania oraz nadskrzyżowania, to diagram nazywamy alternujący.

Splot L jest alternujący, jeśli posiada alternujący diagram D.

Około 1961 roku Ralph Fox zapytał *„What is an alternating knot?"*. Szukano takiej definicji węzła alternującego, która nie odnosi się bezpośrednio do diagramów, aż w 2015 roku Greene [172] podał geometryczną charakteryzację: nierozszczepialny splot w S^3 jest alternujący wtedy i tylko wtedy, gdy ogranicza dodatnią oraz ujemną określoną powierzchnię rozpinającą.

Postać — Ralph Hartzler Fox. Matematyk amerykański urodzon w Morrisville, Pensylwanii w 1913 roku; zmarł w Filadelfii, tamże w 1973 roku. Był promotorem Johna Milnora, Lee Neuwirtha (o których jeszcze wspomnimy!) i 23 innych osób, o których nie wspomnimy. Oprócz tego nadzorował pracę licencjacką Kennetha Perko. Zawdzięczamy mu spopularyzowanie n-kolorowania na koledżu Haverford w 1956 roku, podanie nowego sposobu na znalezienie wielomianu Alexandera przy użyciu rachunku różniczkowego Foxa oraz niektóre terminy teorii węzłów używane po dziś dzień: węzeł plastrowy, węzeł taśmowy, okrąg i powierzchnia Seiferta.

Nie ma zwartego wzoru na liczbę splotów alternujących, ale wiemy, że rośnie co najmniej wykładniczo względem liczby skrzyżowań:

Fakt 1.1.15 Niech a_n oznacza liczbę supłów o n skrzyżowaniach, które są alternujące oraz pierwsze. Wtedy

$$a_n \sim \frac{3c_1\lambda^{n-3/2}}{4\sqrt{\pi n^5}}, \tag{1.5}$$

gdzie zarówno c_1, pierwszy współczynnik rozwinięcia Taylora funkcji $\Phi(\eta)$ zdefiniowanej w [429], jak i λ są jawnie znanymi stałymi:

$$c_1 = \sqrt{\frac{5^7 \cdot (21001 + 371\sqrt{21001})^3}{2 \cdot 3^{10} \cdot (17 + 3\sqrt{21001})^5}} \tag{1.6}$$

$$\lambda = \frac{1}{40}(101 + \sqrt{21001}) \tag{1.7}$$

Niech A_n oznacza liczbę pierwszych, alternujących splotów o n skrzyżowaniach. Wtedy $A_n \approx \lambda^n$, dokładniej: jeśli $n \geqslant 3$, to

$$\frac{a_{n-1}}{16n-24} \leqslant A \leqslant \frac{a_n - 1}{2}. \tag{1.8}$$

Węzły pierwsze i supły pojawiają się odpowiednio w definicjach 2.4.1, 7.2.1.

Niedowód. Zamiast przedstawić dowód albo chociaż jego szkic, wymienimy trzy narzędzia użyte przez Sundberga, Thistlethwaite'a [429]: algebraiczną metodę Conwaya znajdowania splotów, wynik Tuttego dotyczącego liczby ukorzenionych c-sieci oraz (wtedy już udowodnioną) hipotezę Taita. ■

Fakt 1.1.16 Niech a_n oznacza liczbę supłów o n skrzyżowaniach, które są alternujące oraz pierwsze. Wtedy funkcja tworząca $f(z) = \sum_n a_n z^n$ spełnia równanie

$$f(1+z) - f(z)^2 - (1+f(z))q(f(z)) - z - \frac{2z^2}{1-z} = 0, \tag{1.9}$$

gdzie $q(z)$ jest pomocniczą funkcją

$$q(z) = \frac{2z^2 - 10z - 1 + \sqrt{(1-4z)^3}}{2(z+2)^3} - \frac{2}{1+z} - z + 2. \tag{1.10}$$

Powyższa ciekawostka także pochodzi z cytowanej wcześniej pracy [429].

Mimo braku zwartego wzoru, dokładne wartości a_n są znane i stablicowane aż do $n = 24$ (ciąg A002864 w OEIS).

1.1.3 Dopełnienia węzłów i splotów

Jeśli dwa węzły są równoważne, to ich dopełnienia są oczywiście homeomorficzne. Pytanie o prawdziwość implikacji odwrotnej jako pierwszy zadał najprawdopodobniej Tietze [438] w 1908 roku. O jego trudności niech świadczy fakt, że dopiero w roku 1987 pokazano, że istnieją co najwyżej dwa węzły o zadanym dopełnieniu (Culler, Gordon, Luecke, Shalen [105]). Dwa lata później poznaliśmy pozytywną odpowiedź na pytanie Tietzego: każdy węzeł jest wyznaczony jednoznacznie przez swoje dopełnienie. Natomiast analogiczne stwierdzenie

o splotach jest fałszywe i wiedziano o tym od bardzo dawna: w 1937 roku Whitehead [466] podał nieskończenie wiele splotów, których dopełnienia wyglądają jak dopełnienia splotu Whiteheada.

Twierdzenie 1.1.17 — Gordon, Luecke, 1989. Niech $f\colon (\mathbb{R}^3 \setminus K_1) \to (\mathbb{R}^3 \setminus K_2)$ będzie zachowującym orientację homeomorfizmem dopełnień poskromionych węzłów K_1, K_2. Wtedy węzły $K_1 \cong K_2$ są izotopijne.

Niedowód. Wynika to z teorii Cerfa, kombinatorycznych technik w stylu Litherlanda, cienkich pozycji, cykli Scharlemanna i ogólniejszego stwierdzenia: nietrywialna chirurgia Dehna na węźle w 3-sferze nigdy nie daje 3-sfery. Pełny dowód zawiera praca [170]. ■

Twierdzenie to zamienia problem lokalny (czy dwa węzły w kuli S^3 są równoważne?) na problem globalny (czy dwie przestrzenie topologiczne są homeomorficzne?).

1.2 Diagramy. Ruchy Reidemeistera

Chociaż w świetle definicji 1.1.7 węzły są pewnymi regularnymi podzbiorami przestrzeni $\mathbb{R}^3$, z kombinatorycznego punktu widzenia wygodniej jest rysować je na płaszczyźnie.

Definicja 1.2.1 — cień, skrzyżowanie. Niech $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie rzutem na pewną płaszczyznę, zaś $L \subseteq \mathbb{R}^3$ ustalonym splotem. Obraz $\pi[L]$ nazywamy cieniem, punkty podwójne p cienia (punkt $p \in \mathbb{R}^2$, którego przeciwobraz $\pi^{-1}[\{p\}]$ jest dwupunktowy) nazywamy skrzyżowaniami.

Zazwyczaj nie wprowadza się osobnego terminu na cień, tylko oszczędza czas i zaczyna od razu od diagramów, tak jak Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 9]:

Definicja 1.2.2 — diagram. Niech D będzie cieniem splotu L takim, że cień D zawiera skończenie wiele punktów wielokrotnych (i wszystkie są punktami podwójnymi) oraz skrzyżowania cienia D nie zawierają wierzchołków splotu L. Wtedy cień D wzbogacony o informację o tym, jak przebiegają skrzyżowania (który odcinek łamanej biegnie dołem, a który górą) nazywamy diagramem.

Mieliśmy problemy ze znalezieniem ładnego rysunku katastrof, jakich nie dopuszczamy pracując z diagramami zamiast zwykłymi cieniami; nam nie do końca chciało się je rysować tutaj. Wybawieniem okazała się monografia Burdego, Zieschanga (i Heusenera) [64, s. 9].

Dla każdego ustalonego $n \geqslant 2$ i każdego węzła K istnieje cień D, na którym wszystkie wielokrotne punkty są n-krotne (wiemy to od Hostego, College'a [9, s. 11], którzy nie napisali, skąd to wiedzą); dla co najmniej jednej wartości n można dodatkowo wymagać, by diagram zawierał dokładnie jedno skrzyżowanie (Adams, Crawford, DeMeo, Landry, Lin, Montee, Park, Venkatesh, Yhee [8] albo Brunn ponad sto lat temu [9, s. 28]!).

Definicja 1.2.3 — włókno, nić. Fragment diagramu biegnący między dwoma kolejnymi skrzyżowaniami (odpowiednio: tunelami, czyli podskrzyżowaniami), nazywamy nicią (odpowiednio: włóknem)

Skrzyżowania i diagramy są standardowymi terminami, zrozumiałymi przez każdego. Cienie, nici i włókna stanowią twórczość własną autorów! Nici powstają z włókien przez rozcięcie ich przy każdym nadskrzyżowaniu.

Fakt 1.2.4 Niech L będzie splotem. Jego diagramy tworzą otwarty i gęsty podzbiór wszystkich rzutów.

Kawauchi [219, s. 7] wspomina w tym miejscu podręcznik Crowella, Foxa [104, s. 7]. To samo jest na przykład u Burdego, Zieschanga, Heusenera [64, s. 10], ale oni odsyłają jeszcze do Reidemeistera [378] i samego Burdego [61].

Niedowód. Rzut splotu na równoległe płaszczyzny jest taki sam, a te można sparametryzować prostymi przechodzącymi przez początek układu współrzędnych, które tworzą przestrzeń rzutową $\mathbb{RP}^2$. Niech S będzie zbiorem prostych, które dają złe rzuty. Wystarczy pokazać jego nigdziegęstość. Okazuje się, że S jest też jednowymiarowy. Patrz też [367, s. 12]. ■

Wniosek 1.2.5 Każdy splot posiada diagram.

Definicja 1.2.6 — orientacja. Węzeł, w którym wybrano kierunek, w którym należy się po nim poruszać, nazywamy zorientowanym. Splot nazywamy zorientowanym, jeśli wszystkie jego ogniwa traktowane jako węzły są zorientowane.

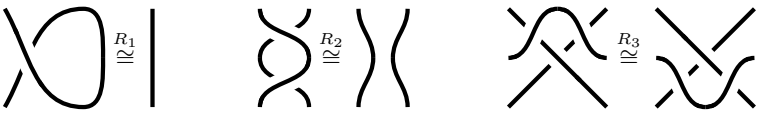
Orientację na diagramie zaznaczamy małą strzałką wskazującą kierunek poruszania się.

1.2.1 Ruchy Reidemeistera

Wiemy już, że węzły mają wiele diagramów. Mając dane dwa różne diagramy chcielibyśmy wiedzieć, czy przedstawiają ten sam węzeł. Stosowne narzędzie dostarczył Kurt Reidemeister w latach dwudziestych ubiegłego wieku. Zdefiniujmy trzy lokalne operacje na diagramach, a potem wysłowimy kryterium Reidemeistera rozstrzygające problem równości węzłów.

Ruchy Reidemeistera pojawiają się w każdym wprowadzeniu do teorii węzłów: [64, s. 10, 11].

Definicja 1.2.7 — ruchy Reidemeistera. Trzy gatunki lokalnych deformacji diagramu splotu:



(a) ruch R_1 (b) ruch R_2 (c) ruch R_3

Rysunek 1.5: Trzy ruchy Reidemeistera

nazywamy ruchami Reidemeistera. Czasami używa się konkretnych nazw:

- skręcenie/rozkręcenie (dla R_1),
- wsunięcie/rozsunięcie (dla R_2) oraz
- przesunięcie łuku przez skrzyżowanie (dla R_3).

Reidemeister w swojej pierwszej pracy przyjął inną kolejność, jego drugi ruch jest naszym pierwszym. Dzięki temu ruch R_k operuje na k łukach diagramu. Colberg [92, s. 6] pisze, że Maxwell znał ruchy Reidemeistera przed Reidemeisterem, ale mimo próśb Taita nigdy nie zgłosił swojego odkrycia w Royal Society of Edinburgh.

Twierdzenie 1.2.8 — Reidemeister, 1927. Niech D_1, D_2 będą diagramami dwóch splotów L_1, L_2. Sploty L_1, L_2 są takie same wtedy i tylko wtedy, gdy diagram D_2 można otrzymać z D_1 wykonując skończony ciąg ruchów Reidemeistera oraz gładkich deformacji łuków, bez zmiany biegu skrzyżowań.

Twierdzenie Reidemeistera jest prawdziwe także dla splotów zorientowanych, ale wtedy trzeba uwzględnić różne orientacje łuków i nie jest oczywiste, ile spośród $2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$ wersji jest potrzebne. Polyak [361] pokazał, że minimalny zbiór zorientowanych ruchów składa się na przykład z dwóch wersji ruchu R_1, jednej wersji ruchu R_2 i jednej wersji ruchu R_3.

Niedowód. Dowód podali niezależnie Reidemeister [378] oraz Alexander, Briggs [13]. Szkielet dowodu można znaleźć w książce Burdego i Zieschanga [64, s. 9-11], ale kluczowe pomysły podają też Prasołow z Sosińskim [364, s. 11-12]. Innym przystępnym źródłem jest podręcznik Murasugiego [328, s. 50-56]. ■

Postać — Kurt Werner Friedrich Reidemeister. Matematyk niemiecki urodzon w Brunszwiku w 1893 roku; zmarł w Getyndze w 1971 roku. W 1922 został nominowany na stanowisko profesora nadzwyczajnego na Uniwersytecie Wiedeńskim; nominację tę przyjął. To podczas pobytu tamże podjął decyzję o studiowaniu teorii węzłów, ale także poznał swoją przyszłą żonę: pochodzącą z Rygi Elżbietę Wagner. W 1925 roku przeniósł się na Albertynę we (wtedy jeszcze pruskim) Królewcu, gdzie opracował kamień węgielny teorii węzłów: ruchy Reidemeistera. Później dokonał jeszcze kilku ciekawych odkryć: w 1935 zdefiniował niezmienniki torsyjne, które po raz pierwszy były w stanie odróżnić równoważne homotopijnie, ale nie homeomorficzne rozmaitości; konkretniej: pokazał, że przestrzenie soczewkowe $L(7,1)$ i $L(7,2)$ nie są homeomorficzne. Sklasyfikował grupy abelowe, które występują jako grupy podstawowe 3-rozmaitości i dowiódł, że każde dwa rozkłady Heegaarda 3-rozmaitości mają wspólną stabilizację.

(O rozkładzie albo też rozszczepieniu Heegaarda piszą Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 44]; Zieschang był jednym ze studentów Reidemeistera.)

Postać — James Waddell Alexander. Matematyk amerykański urodzon w 1888 roku w Sea Bright, New Jersey; zmarł w 1971 roku w Princeton, też New Jersey. Był studentem Veblena, wspólnie z którym pokazał, że topologię rozmaitości można przenieść na wielościany. Przed 1920 rokiem udowodnił, że homologie kompleksów symplicjalnych są niezmiennikiem topologicznym. Jego pionierskie prace dotyczące topologii algebraicznej położyły fundament dla pomysłów Poincarégo. Kiedyś pomiędzy rokiem 1930 i 1935 zdefiniował kołańcuchy, co doprowadziło go do odkrycia (niezależnie od Kołmogorowa) kohomologii. Oprócz sztuczki Alexandera wprowadził bardzo ważny niezmiennik nazwany na jego cześć wielomianem Alexandera, moduł z gradacją otrzymany z homologii cyklicznego nakrycia dopełnienia węzła. Nie samą matematyką żył człowiek! Był miłośnikiem wspinaczki górskiej. Podczas pobytu w Princeton regularnie zostawiał uchylone okno w swoim gabinecie, żeby móc się do niego wdrapać.

Postać — Garland Baird Briggs. Matematyk amerykański, urodzon w Sebrell, Wirginii w 1894 roku; zmarł w Kolumbii w 1959 roku. Niestety nie wiemy za dużo o tym człowieku.

Trace [440] zauważył, że dwa diagramy jednego węzła są związane tylko II i III ruchem (ale nie I) wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam spin oraz indeksy nawinięcia. Z prac Östlunda [475], Manturowa [287, s. ???] oraz Haggego [176] wynika, że dla każdego węzła istnieje para

diagramów, do przejścia między którymi trzeba wykorzystać wszystkie trzy ruchy. Coward [97] zademonstrował, że nawet jeśli wszystkie trzy ruchy są potrzebne, można je wykonywać w specjalnej kolejności: najpierw tylko I ruchy, potem tylko II ruchy, następnie tylko III ruchy i znowu II ruchy.

Do pokazania, że dwa węzły K_1, K_2 nie są równoważne, powinniśmy na mocy twierdzenia 1.2.8 udowodnić, że żaden ciąg ruchów Reidemeistera nie przekształca jednego w drugi. Oczywiście nikt o zdrowych zmysłach tak nie postępuje. Zamiast tego wprowadza się stosowny niezmiennik, czyli funkcję f określoną na zbiorze wszystkich węzłów (albo splotów, supłów, warkoczy itd.) tak, że jeśli węzły $K_1 \cong K_2$ są równoważne, to $f(K_1) = f(K_2)$. Łatwo widać, że jeśli $f(K_1) \neq f(K_2)$, to węzły K_1, K_2 nie mogą być równoważne. Natomiast gdy wartości są te same, nie dostajemy żadnej informacji.

Poznaliśmy jak na razie dwa niezmienniki: liczbę ogniw splotu oraz dopełnienie splotu do przestrzeni, w której jest zanurzony ($\mathbb{R}^3$ lub S^3). Wiele, chociaż nie wszystkich, innych niezmienników definiuje się nie bezpośrednio na zbiorze węzłów, ale na zbiorze diagramów. Należy wtedy sprawdzić, że każdy z trzech ruchów Reidemeistera nie ma wpływu na wartość niezmiennika.

Niezmienniki będą nam stale towarzyszyć w wędrówce po krainie węzłów.

Dygresja – wyniki ilościowe wokół twierdzenia Reidemeistera

Załóżmy, że na dwóch diagramach tego samego węzła widać odpowiednio n_1, n_2 skrzyżowań. Jak piszą Coward, Lackenby [98], istnieje funkcja $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że między dwoma diagramami można przejść wykonując co najwyżej $f(n_1, n_2)$ ruchów. Wynika to z faktu, że istnieje skończenie wiele spójnych diagramów o danej liczbie skrzyżowań oraz twierdzenia Reidemeistera. Okazuje się jednak, że od funkcji f można żądać, by była obliczalna (a to jest chyba równoważne istnienia algorytmu rozpoznającego, czy dwa diagramy przedstawiają jeden węzeł) i faktycznie, główny wynik [98] orzeka, że

$$f(n_1, n_2) = 2^{2^{\cdots^{2^{n_1+n_2}}}} \tag{1.11}$$

jest taką funkcją. Piętrowa potęga liczy sobie aż $10^{1000000(n_1+n_2)}$ warstw.

Natomiast jeżeli $n_2 = 0$, czyli drugi diagram przedstawia niewęzeł, „wystarcza" $(236n_1)^{11}$ ruchów, przy czym liczba skrzyżowań podczas transformacji nigdy nie przekracza $49c^2$: to świeższy wynik samego Lackenby'ego [252], gdzie poprawił wcześniejsze oszacowania Hassa, Lagariasa. Przykład diagramu niewęzła, do rozwiązania którego nie można tylko usuwać istniejących skrzyżowań, przedstawiają Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 12].

Hayashi [183] dowiódł, że liczbę ruchów Reidemeistera potrzebnych, by rozszczepić splot można ograniczyć z góry na podstawie indeksu skrzyżowaniowego.

1.2.2 Historia tablic węzłów

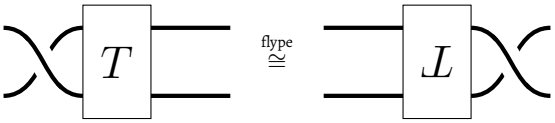
Pierwszą osobą, która podjęła się szukania węzłów, był Peter Guthrie Tait, szkocki fizyk. Razem z Thomsonem (lordem Kelvinem) wierzyli, że węzły są kluczem do zrozumienia widma spektroskopowego różnych pierwiastków: na przykład atom sodu mógł być splotem Hopfa ze względu na dwie linie emisyjne. Eksperyment Michelsona-Morleya z 1887 roku zabił ich „wirową teorię atomu", ale nie miało to znaczenia dla teorii węzłów jako działu matematyki.

Używana po dziś dzień strategia, którą przyjął Tait, jest stosunkowa prosta: narysować wszystkie możliwe diagramy o zadanym indeksie skrzyżowaniowym, po czym połączyć ze sobą te, które przedstawiają jeden węzeł. Na potrzeby pierwszego etapu Tait wymyślił schemat kodowania diagramów. Opiszemy później jego ulepszenie, kod Dowkera-Thistlethwaite'a.

Siedem i mniej skrzyżowań

Tait wykorzystując swoją notację podał w 1876 pierwszą tablicę piętnastu węzłów o mniej niż ośmiu skrzyżowaniach. Nie należy traktować tego jako skromny wynik: nie miał on do dyspozycji żadnych twierdzeń topologicznych do odróżniania węzłów. Onieśmielony przez liczbę możliwych kodów dla kolejnych indeksów skrzyżowaniowych, powstrzymał się przed rozszerzaniem swojej tablicy. To właśnie grupowanie diagramów przedstawiających ten sam węzeł, a nie samo szukanie wszystkich możliwych diagramów, sprawia trudność.

Aby sobie pomóc, Tait znalazł lokalną modyfikację diagramu, która nie zmienia indeksu skrzyżowaniowego, znaną obecnie jako FLYPE. Dla Taita „flype" było innym ruchem, prostą transformacją związaną ze zmianą wyboru nieskończonego obszaru, ale pamięta o tym teraz mało kto. Dowiedzieliśmy się o tym z pracy [295]; Menasco i Thistlethwaite dowiedzieli się o tym od Claude'a Webera. Flype to stary szkocki czasownik oznaczający „wykręcać na drugą stronę".



Rysunek 1.6: Ruch flype

Całkiem inną taktykę szukania węzłów przyjął wielebny Thomas Kirkman: zaczynał od małego zbioru "nieredukowalnych" rzutów, do których systematycznie dokładał skrzyżowania. Od początku był zainteresowany głównie alternującymi węzłami; w 1885 roku wydrukował diagramy 634 węzłów o dziesięciu skrzyżowaniach.

Definicja 1.2.9 — węzła, Kirkmana, w stu słowach. *By a Knot of n crossings, I understand a reticulation of any number of meshes of two or more edges, whose summits, all tessaraces, are each a single crossing, as when you cross your forefingers straight or slightly curved, so as not to link them, and such meshes that every thread is either seen, when the projection of the Knot with its n crossings and no more is drawn in double lines, or conceived by the reader of its course when drawn in single line, to pass alternately under and over the threads to which it comes at successive crossings.*

Wiemy, że Tait czytał czasopismo zawierające diagramy Kirkmana i wykorzystał je do opracowania prawie kompletnej listy węzłów alternujących o mniej niż 11 skrzyżowaniach. Tuż przed oddaniem jej do druku odkrył inny spis węzłów stworzony przez amerykańskiego naukowca Charlesa Little'a. Znalazł wtedy jeden duplikat u siebie, natomiast u Little'a jeden duplikat i jedno pominięcie.

Dziesięć skrzyżowań

Zachęcon przez Taita, Little zabrał się za alternujące węzły o 11 skrzyżowaniach i za trudniejsze zadanie, stablicowanie węzłów niealternujących, czyli takich, które nie posiadają alternującego diagramu. Jak wynika z pierwszej pracy Taita, początkowo nie wierzono, że takie w ogóle istnieją. Dowód znaleziono wiele lat później, niealternujące są 8_{19}, 8_{20}, 8_{21}, ale nie pierwsze węzły o mniejszej liczbie skrzyżowań. Patrz fakt 4.3.3. Little pracował przez sześć lat (1893 – 1899) i znalazł 43 niealternujące węzły o 10 skrzyżowaniach. Żadnego nie pominął, ale trafił mu się jeden duplikat.

W kolejnych dziesięcioleciach nie nastąpił znaczący postęp, zarówno w rozszerzaniu tablic,

jak i sprawdzaniu tych już istniejących. Haseman [180] w 1918 roku znalazła achiralne węzły o 12 (takich jest 54, praca Haseman podaje 61, ponieważ zawiera 7 duplikatów) i 14 skrzyżowaniach. W 1927 roku Alexander z Briggsem [13] przy użyciu pierwszej grupy homologii rozgałęzionego nakrycia cyklicznego (!) potrafili odróżnić od siebie dowolne dwa węzły (z pominięciem 3 par) o co najwyżej 9 skrzyżowaniach. Reidemeister [379] poradził sobie z tymi wyjątkami w 1932 roku, korzystając z indeksu zaczepienia i homomorfizmów z grupy węzła na grupy diedralne.

Jedenaście skrzyżowań

Na dalszy postęp musieliśmy czekać do lat sześćdziesiątych. Wtedy to John Conway [94] znalazł prawie wszystkie pierwsze węzły o mniej niż 12 skrzyżowaniach oraz sploty o mniej niż 11 skrzyżowaniach. Odkrył jeden duplikat oraz jedenaście pominięć w starych tablicach Little'a (do 11 skrzyżowań), ale sam zgubił cztery węzły. Naprawienie błędu zajęło chwilę: dwa brakujące węzły zawierała praca magisterska Lombardero z 1968 roku, dwa odkrył Caudron około 1980 roku [75]. Conway też popełnił dwa duplikaty: współcześnie bardziej znany to para Perko, węzeł reprezentowany przez dwa diagramy aż do tablic Rolfsena. Nazywamy ją tak, ponieważ została dostrzeżona przez Perko [353], który bezskutecznie próbował odróżnić składniki pary diedralnym indeksem zaczepienia: dla obydwu diagramów wynosi on $32/11$. Jako przyczynę tak długiego niezauważenia pary Perko podaje się hipotezę Little'a, że spin minimalnego diagramu jest niezmiennikiem, gdyż błędnie założył, że 2-przejścia oraz flype wystarczają do zmiany dowolnego minimalnego diagramu w inny. (Diagramy pary Perko mają różny spin). Zachęcamy w tym miejscu do nieprzeskakiwania strony 30, gdzie para Perko pojawia się raz jeszcze. Mniej znany duplikat wystąpił w tablicy splotów do 10 skrzyżowań, gdzie `2.-2.-20.20` jest lustrem `8*-20:-20`.

Pomimo opisanych wyżej drobnych niepowodzeń, metodę Conwaya (mającą fundamenty w pomysłach Kirkmana) uznaje się za bardzo dobrą. Conway potrzebował zaledwie kilku godzin na przeprowadzenie swojej klasyfikacji; a my używamy jej po dziś dzień, na przykład Tuzun, Sikora zweryfikowali dzięki niej hipotezę 5.2.11 do 24 skrzyżowań.

Rękopis [44] (albo [43]?) Bonahona, Siebenmanna klasyfikuje węzły algebraiczne. Kres ery ręcznych obliczeń nastąpił, gdy z nielicznymi niealgebraicznymi węzłami do 11 skrzyżowań poradził sobie Perko [355], [356].

Postać — John Horton Conway. Matematyk brytyjski urodzon w 1937 roku w Liverpoolu, zmarł w 2020 roku w New Brunswick, New Jersey. Był wszechstronnie uzdolniony: opracował grę w życie (jeden z pierwszych i najbardziej znanych przykładów automatów komórkowych) oraz kropki (razem z Patersonem, polega na łączeniu kropek liniami tak, by się nie przecinały – po angielsku *sprouts*); ustalił, że poza sześcioma regularnymi 4-wielotopami oraz dwoma nieskończonymi seriami zaczynającymi się od dwugraniastosłupa i antydwugraniastosłupa istnieją 64 wypukłe jednorodne 4-wielotopy; znalazł grupę automorfizmów kraty Leecha, pokazał, że każdą liczbę naturalną można zapisać jako 37 piątych potęg oraz wskazał przykład funkcji, która jest nigdzie ciągła i ma wszędzie własność Darboux. Dla nas najciekawsza jest jego praca [94] o supłach.

Trzynaście skrzyżowań

Na początku lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku Dowker i Thistlethwaite [119] z pomocą komputera stablicowali węzły do 13 skrzyżowań. Przez blisko dekadę nic się nie działo, aż wreszcie grupa studentów (Arnold, Au, Candy, Erdener, Fan, Flynn, Muir, Wu [14]) wygrała dostęp do superkomputera Cray. Razem z Hoste znaleźli alternujące węzły do 14 skrzyżowań, jednocześnie sprawdzając istniejące tabele Thistlethwaite'a.

Szesnaście skrzyżowań

Około roku 1998 Hoste z Weeksem oraz niezależnie Thistlethwaite [191] znaleźli 1 701 936 pierwszych węzłów do 16 skrzyżowań. Używali przy tym różnych podejść: Hoste z Weeksem wykorzystywali niezmienniki hiperboliczne oraz program SnapPea; Thistlethwaite natomiast wzbogacił zestaw ruchów Reidemeistera o flype, przejście, 2-przejście, ruch Perko oraz kilka innych ezoterycznych przekształceń tak, żeby poradzić sobie z upartymi parami diagramów. Wśród pierwszych węzłów do 16 skrzyżowań na 32 wyjątkowe (niehiperboliczne) węzły składa się 12 węzłów torusowych oraz 20 satelitów trójlistnika. To samo jeszcze raz napiszemy na stronie 173.

Dziewiętnaście skrzyżowań

Artykuł [191] zawiera informację, że jego autorzy szukają węzłów o 17 skrzyżowaniach, ale my nie doszukaliśmy się żadnej późniejszej publikacji na ten temat. W 2004 Flint, Rankin oraz Schermann [376] znaleźli alternujące węzły do 22 skrzyżowań (obliczenia na stacji roboczej z procesorem Xeon oraz 3 gigabajtami pamięci zajęły około 45 godzin), po czym długo nie działo się nic.

Dopiero w 2020 Burton [66] stablicował węzły pierwsze do 19 skrzyżowań: „*Here we extend the tables from 16 to 19 crossings, with a total of 352 152 252 distinct non-trivial prime knots.*"

Thistlethwaite opublikował na swojej stronie internetowej, że znalazł węzły pierwsze do 20 skrzyżowań; czekamy na publikację w renomowanym czasopiśmie. Jeżeli nie popełnił żadnego błędu, to mamy 199 631 989 alternujących i 1 647 687 439 niealternujących węzłów pierwszych o dwudziestu skrzyżowaniach. Wśród nich mamy 915 satelitów trójlistnika, 5 satelitów ósemki oraz węzeł (3,10)-torusowy; pozostałe węzły są hiperboliczne.

Sploty

Cerf [76] pisze, że Conway [94] znalazł wcześniej sploty do 10 skrzyżowań, zaś Caudron [75] poprawił wynik do 11 skrzyżowań, ale wszystkie te sploty są niezorientowane, a naukowcy potrzebują zorientowanych. Problem został zaadresowany najpierw przez Dolla i Hoste'a [118], którzy wydali na mikrofilmie tablicę splotów zorientowanych do 9 skrzyżowań, ale ich diagramy nie zawsze pasowały do tych narysowanych w książce Rolfsena.

Cerf obiecuje pogodzić punkty widzenia Rolfsena oraz Dolla/Hoste'a i tworzy własną tablicę zorientowanych splotów do 11 skrzyżowań. Sprawdziła jednocześnie poprawność starszych tablic Conwaya – i nie znalazła tam żadnych błędów.

Wiemy od Hostego, że Jablan [195] znalazł alternujące sploty o 12 skrzyżowaniach w duchu metod Kirkmana i Conwaya. Praca Jablana została wydrukowana w 1999 roku. W 2001 roku Thistlethwaite posiadał tablicę pierwszych splotów alternujących do 19 skrzyżowań, jednak wygląda na to, że nigdy jej nie opublikował. W 2007 roku Fontaine, Rankin, Flint znaleźli liczbę pierwszych splotów alternujących o 20, 21, …, 24 skrzyżowaniach.

Klasyfikację splotów o 12 i 13 skrzyżowaniach znaleźliśmy w pracy magisterskiej Dylana Faullina (jego zdaniem jest ich, odpowiednio, 6447 i 28239). Z niezrozumiałych dla nas przyczyn pomimo upływu prawie dwóch dekad, ten wynik pozostaje raczej nieznany. Nie ma go na przykład w ciągu A086771 w bazie danych OEIS.

1.2.3 Metody kodowania

Notacja Gaußa

Pierwszymi osobami, które zajmowały się węzłami, byli prawdopodobnie Gauß oraz jego uczeń, Listing. Gauß wprowadził indeks zaczepienia dwóch węzłów jako pewna całka oraz notację dla węzłów. Wybierzmy punkt na diagramie, który nie jest skrzyżowaniem i przemierzajmy go zgodnie z orientacją. Gdy mijamy nowe skrzyżowania, przypisujemy im kolejne liczby $1, 2, \ldots$, zaś dla starych skrzyżowań przepisujemy numer. Jeżeli mijamy skrzyżowanie dołem, kodujemy je liczbą z minusem.

W ogólnym przypadku nie można odtworzyć węzła z jego kodu, ale można delikatnie zmienić notację, by było to możliwe. Kiedy mijamy skrzyżowanie drugi raz, stawiamy minus przed liczbą, jeżeli skrzyżowanie jest lewoskrętne i plus w przeciwnym wypadku. Nazywa się to rozszerzonym kodem Gaußa.

■ **Przykład 1.2.10** Rozpatrzmy węzeł z rysunku 1.7. Jego (zwykły) kod Gaußa to -1 2 -3 4 -5 6 -7 8 -6 5 -4 3 -2 9 -10 1 -9 7 -8 10, zaś kod rozszerzony to -1 2 -3 4 -5 6 -7 8 **-6 -5 -4 -3 -2** 9 10 **1 9 -7 -8 10**. Pogrubione liczby odpowiadają drugim przejściom. ■



(a) ...dla kodu Gaußa (b) ...dla kodu Dowkera-Thistlethwaite'a

Rysunek 1.7: Numeracja skrzyżowań

Gauß był świadomy, że szukanie koniecznych i wystarczających warunków na to, by ciąg $2n$ liczb był kodem jakiegoś węzła jest ciekawym problemem, ale chyba nie zdecydował się nim zająć. Stosowne algorytmy podali trochę później topolodzy (Dehn [110]) i dużo później teoretycy grafów (Rosenstiehl, Read [388]). Inny algorytm Dowkera, Thistlethwaite'a [119] został zaimplementowany jako program komputerowy liczący około 30 linii kodu, stanowił ważny element tablicowania małych węzłów pierwszych.

Notacja Dowkera-Thistlethwaite'a

Poprawia nieopisaną tutaj notację Taita, opisana po raz pierwszy w pracy [119].

Tak jak w notacji Gaußa, przemierzamy węzeł zaczynając poza skrzyżowaniem. Tym razem jednak stare skrzyżowania dostają drugi, nowy numer. Jak można zauważyć, każde skrzyżowanie ma parzystą oraz nieparzystą etykietę.

Definicja 1.2.11 Ciąg parzystych liczb występujących na diagramie kolejno przy $1, 3, \ldots$ nazywamy kodem Dowkera-Thistlethwaite'a. Jeżeli nieparzysta etykieta odpowiadała podskrzyżowaniu, zapisujemy liczbę z minusem.

Opisany powyżej kod nie jest idealny, ponieważ odtworzony z niego węzeł może być lustrzanym odbiciem wyjściowego. Ogólniej, odbicie dowolnego składnika sumy spójnej nie zmienia kodu całego węzła. Nie stanowi to jednak dużego problemu, ponieważ notacja została stworzona na potrzeby tablicowania węzłów pierwszych, a te są niezorientowane.

■ **Przykład 1.2.12** Rozpatrzmy węzeł z rysunku 1.7. Jego kodem Dowkera-Thistlethwaite'a jest ciąg 16 12 10 18 6 4 2 20 14 8. ■

Zaczynając od zredukowanego diagramu o n skrzyżowaniach nie można doprowadzić do sytuacji, gdzie do pewnego skrzyżowania przypisane są dwie kolejne liczby całkowite. Dzięki temu problem można przetłumaczyć na język teorii grafów. Rozpatrzmy graf G, którego wierzchołkami są liczby $1, 2, \ldots, 2n$. Połączmy niesąsiadujące modulo $2n$ wierzchołki o różnej parzystości krawędziami. Graf ten powstaje przez usunięcie cyklu Hamiltona (łączącego kolejne liczby) z pełnego grafu dwudzielnego. Zbiór par etykiet przy skrzyżowaniach węzła to skojarzenie doskonałe w grafie G. Liczba skojarzeń prawie pokrywa się z rozwiązaniem zadania znanego w literaturze jako „PROBLÈME DES MÉNAGES": na ile sposobów n małżeństw można posadzić przy okrągłym stole tak, by żadne małżeństwo nie siedziało obok siebie i każdy mężczyzna znalazł się obok dwóch kobiet? Ustawienia, które powstają przez cykliczne permutowanie należy uznać za tożsame. Gilbert [157] znalazł wzór na a_n, liczbę różnych kodów:

$$u(m,t) = 2m \sum_{k=0}^{m} \binom{2m-k}{k} \cdot (m-k)! \cdot \frac{(t-1)^k}{2m-k} \tag{1.12}$$

$$a(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^d \cdot u\left(d, 1-\frac{d}{n}\right) \cdot \varphi\left(\frac{n}{d}\right) \tag{1.13}$$

Kilka początkowych wartości to $a_3 = 1, 2, 5, 20, 87, 616, 4843, 44128, 444621, \ldots$ (ciąg A002484 w OEIS).

Notacja Alexandera-Briggsa

W 1927 roku Alexander, Briggs wprowadzili zupełnie inny sposób oznaczania węzłów – wtedy do 9 skrzyżowań, ale przedłużony do 10 skrzyżowań przez Rolfsena i używany po dziś dzień. Do opisu węzła używa się dwóch liczb: jego indeksu skrzyżowaniowego z dolnym indeksem, oznaczającym miejsce w tablicy węzłów. I tak węzły o ośmiu skrzyżowaniach to $8_1, 8_2, \ldots, 8_{21}$. Porządek jest umowny i jego wybór należy do osoby, która jako pierwsza znajdzie wszystkie węzły o danej liczbie skrzyżowań (ale węzeł skręcony występuje zawsze po torusowym).

Od jedenastu skrzyżowań pojawia się mała zmiana: węzły alternujące i niealternujące kataloguje się osobno. I tak $11n_{185}$ to sto osiemdziesiąty piąty węzeł niealternujący o 11 skrzyżowaniach, zaś $11a_{367}$ to trzysta sześćdziesiąty siódmy alternujący.

Rolfsen w 1976 stworzył z kilkoma błędami tablicę diagramów pierwszych węzłów do 10 skrzyżowań. Para Perko 10_{161}, 10_{162} przedstawia ten sam węzeł, zaś górne skrzyżowanie w 10_{144} powinno być zmienione. Ostatnie cztery węzły dostały nowe numery, by uniknąć duplikatu. Kolejną usterką tablicy jest to, że notacja Conwaya oraz wielomian Alexandera dla węzłów 10_{83} oraz 10_{86} są zamienione miejscami. Tu czyha pułapka:[2] Stojmenow, nowe wydanie książki Rolfsena, atlas węzłów Bar-Natana oraz tablica niezmienników węzłowych Livingstona naprawiają to przez wymianę podpisów. Podręcznik Kawauchiego wymienia diagramy.

[2] Wiemy o niej dzięki stronie http://stoimenov.net/stoimeno/homepage/ptab/.

Ze strony internetowej Stojmenowa dowiedzieliśmy się jeszcze czegoś. Kolejność Rolfsena dla węzłów o 10 skrzyżowaniach obala nomenklaturę Little'a niealternujących oraz nadpisuje numerowanie Taita dla alternujących węzłów. Alexander, Briggs zrobili wcześniej to samo dla 9 lub mniej skrzyżowań.

Notacja Conwaya

Wprowadzona przez Conwaya w pracy [94]. Wymaga znajomości supłów, więc przedstawiamy ją po ich zdefiniowaniu, na stronie 149.

Nazwy zwyczajowe

Niektóre węzły i sploty, w szczególności te o niskim indeksie skrzyżowaniowym, występują tak często w teorii węzłów, że doczekały się nazw zwyczajowych. Oto ich lista:

- węzeł 0_1 to niewęzeł;
- węzeł 3_1 to trójlistnik,
- węzeł 4_1 to ósemka albo węzeł Listinga,
- węzeł 5_1 to pięciolistnik albo węzeł Solomona (!),
- węzeł 6_1 to węzeł dokerski/sztauerski,
- węzeł 11n34 to węzeł Conwaya,
- węzeł 11n42 to węzeł Kinoshity-Terasakiego,
- węzeł 12n242, czyli $(-2, 3, 7)$-precel, to z powodu pracy [132] węzeł Fintushela-Sterna,
- suma spójna takich samych trójlistników to węzeł babski,
- suma spójna lustrzanych trójlistników to, dość niefortunnie, węzeł prosty/płaski
- splot 2_1^2 (L2a1) to splot Hopfa,
- splot 4_1^2 (L4a1) to węzeł Solomona (!),
- splot 5_1^2 (L5a1) to splot Whiteheada,
- splot 6_2^3 (L6a4) to pierścienie Boromeuszy.

1.3 Wykrywanie niewęzła

Jednym z pierwszych dużych problemów teorii węzłów było poszukiwanie odpowiedzi na pytanie, kiedy diagram przedstawia niewęzeł. Stosowny algorytm wykrywający niewęzły podał Haken [177], ale długo nikt nie podjął się jego implementacji. Epple pisze *„this algorithm was extremely impractical"*, w recenzji z MathSciNet proponuje, żeby przed przeczytaniem pełnej niepotrzebnych dygresji pracy Hakena poznać artykuł [403] Schuberta. W życie pomysły Hakena udało się wdrożyć Burtonowi, Budneyowi oraz Petterssonowi w komputerowym programie Regina[3] na przełomie tysiącleci.

Burton, Rubinstein i Tillman [68] pokazali, jak sprawdzać, w czasie wykładniczym czy powierzchnia normalna na striangulowanej 3-rozmaitości jest (nie)ściśliwa. To wystarczyło do udzielenia negatywnej odpowiedzi na pytanie Thurstona: *„czy przestrzeń Seiferta-Webera jest rozmaitością Hakena*?", a zatem wykraczającego poza poziom naszego skromnego dzieła. (Rozmaitość Hakena to zwarta, P^2-nierozkładalna 3-rozmaitość, która jest dostatecznie duża, to znaczy zawiera właściwie zanurzoną dwustronną powierzchnię nieściśliwą, co za miks mądrych słów. Przykłady obejmują zwarte, nierozkładalne 3-rozmaitości z dodatnią pierwszą liczbą Bettiego, w tym wiązki powierzchniowe nad okręgiem; ale też dopełnienia splotów).

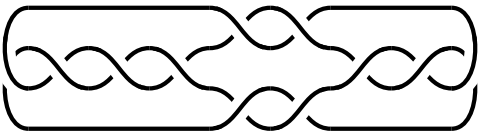
SnapPea[4] to inny popularny wśród niskowymiarowych topologów program pozwalający badać hiperboliczne 3-rozmaitości, patrz sekcja 7.7.

[3] https://regina-normal.github.io/.
[4] http://geometrygames.org/SnapPea/index.html.

Wiadomo, że genus oraz zredukowana kohomologia Chowanowa wykrywa niewęzły (fakty 6.2.19, 6.4.2) i nie wiadomo, czy wielomian Jonesa to robi (hipoteza 5.2.11). Od dawna wiadomo, że wielomian Alexandera nie wykrywa niewęzła (przykład 5.1.6). W lutym 2021 Lackenby ogłosił nowy algorytm rozpoznający niewęzły w quasiwielomianowym czasie.

Wyśmienitym punktem wyjścia do poszukiwań trudnych niewęzłów jest praca [67], dzieło Burtona, Changa, Löfflera, de Mesmaya, Marii, Schleimera, Sedgwicka oraz Spreera. Cytuje ona artykuł Lackenby'a [252], gdzie poznaliśmy stary (z 1934 roku!) przykład Goeritza [161] diagramu niewęzła o 11 skrzyżowaniach, który można zmienić w zwykły diagram niewęzła tylko zwiększając po drodze liczbę skrzyżowań. Na kolejne teksty przyszło poczekać ponad pół wieku. Autorzy przywołują jeszcze klasyczny przykład Freedmana, He, Wanga [144]; ale też podstępne niewęzły Hakena, Ochiai, Thistlethwaite'a oraz mocno doświadczalną pracę Petronio, Zanellatiego [358].

My nie potrafimy albo nie chcemy potrafić ładnie rysować, więc pozwolimy sobie pokazać tylko, jak wyglądał wspomniany wcześniej przykład Goeritza. Na swoim blogu[5] Burton (inny Burton niż w poprzednim akapicie!) zamieścił wpis pełen rysunków, które tłumaczą, jak powstał niewęzeł Hakena.



Rysunek 1.8: niewęzeł Goeritza

1.4 Hipotezy Taita

Tait na podstawie węzłów o małej liczbie skrzyżowań wysunął około 1898 roku trzy lub cztery hipotezy. Nie jest jasne, czy chodziło mu o wszystkie węzły, czy tylko te alternujące. Wszystkie trzy hipotezy są już twierdzeniami matematycznymi, ale ponieważ ich dowód wykorzystuje m.in. wielomian Jonesa, musimy wstrzymać się z dowodem. Nic nie stoi na przeszkodzie, żeby podać treść hipotez już teraz, a uzasadnienie później, w sekcji 5.2.7.

Hipoteza 1.4.1 (I hipoteza Taita)**.** *Zredukowany alternujący diagram splotu ma minimalny indeks skrzyżowaniowy.*

Najpierw znaleziono dowód korzystający z wielomianu Jonesa: dokonali tego w 1987 roku równocześnie Kauffman [212], Murasugi [325] oraz Thistlethwaite [432]. Trzydzieści lat później Greene [172] zaprezentował geometryczne podejście do problemu.

Hipoteza 1.4.2 (II hipoteza Taita)**.** *Dwa zredukowane diagramy alternujące jednego węzła mają ten sam spin.*

Pierwsze dowody pochodzą znowu od Kauffmana [212] oraz Thistlethwaite'a [432]. Dla niektórych II hipoteza brzmi inaczej („achiralny splot alternujący ma zerowy spin"), dla innych jest prostym wnioskiem z naszego sformułowania.

Hipoteza 1.4.3 (III hipoteza Taita)**.** *Niech D_1, D_2 będą zredukowanymi alternującymi diagramami zorientowanego pierwszego splotu. Wtedy diagram D_2 można otrzymać z D_1 korzystając jedynie z ruchu* flype.

[5] https://mickburton.co.uk/2015/06/05/how-do-you-construct-hakens-gordian-knot/

Trzecią hipotezę udowodnił Menasco wspólnie z Thistlethwaitem [295]. Wynika z niej, że dwa zredukowane diagramy alternujące tego samego węzła mają ten sam spin. Nie jest prawdziwa dla niealternujących splotów, przez co w tablicach węzłów tak długo mieliśmy duplikat – parę Perko.

Czasami mówi się jeszcze o IV hipotezie: że

Hipoteza 1.4.4 (IV hipoteza Taita?)**.** *Zwierciadlane węzły mają parzysty indeks skrzyżowań.*

Ta okazała się fałszywa, pisaliśmy o tym na stronie 36.

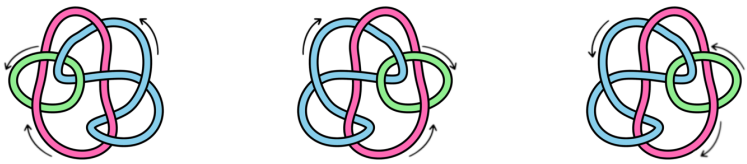
2. Operacje węzłowe

Mając dany diagram splotu zorientowanego, można odwrócić jego wszystkie ogniwa albo wszystkie skrzyżowania. Działania te nazywamy odpowiednio rewersem i lustrem, opisujemy je w pierwszej podsekcji. Dalej pojawi się suma niespójna oraz spójna, odpowiednik mnożenia liczb naturalnych zbadany dokładniej przez Schuberta około 1954 roku. Znacznie później (bo dopiero w sekcji 7.2) wprowadzimy jeszcze sumę i iloczyn supłów.

2.1 Lustro i rewers. Węzły skrętne i zwierciadlane

Definicja 2.1.1 — lustro. Niech L będzie zorientowanym splotem. Splot m L powstały przez odbicie splotu L względem dowolnej płaszczyzny nazywamy lustrem.

Definicja 2.1.2 — rewers. Niech L będzie zorientowanym splotem. Splot r L powstały przez odwrócenie orientacji wszystkich ogniw splotu L nazywamy rewersem.



(a) lustro mL (b) przykładowy splot L (c) rewers rL

Na lewym obrazku odbiliśmy diagram względem pionowej płaszczyzny, ale ten sam splot dostalibyśmy odwracając wszystkie nad- i podskrzyżowania (czyli odbijając go względem płaszczyzny papieru, ale programy graficzne nie pozwalają na wykonanie tej operacji zbyt łatwo, a my jesteśmy trochę leniwi).

Niektórzy mówią o odbiciach lustrzanych i odwrotnościach. Zaletą naszych oznaczeń jest to, że trudniej jest pomylić lustro z odwrotnością; ale w literaturze dominuje L^* jako symbol lustra oraz $-L$ jako symbol odwrotności splotu L; używają ich na przykład Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 16] czy Murasugi [328, s. 14, 24]. Lickorish [261, s. 4] używa rL dla odwrotności oraz $\overline{L}$ dla lustra; zapewne ktoś gdzieś używa jeszcze innych znaczków.

Zauważmy, że wzięcie lustra i/lub rewersu węzła nie musi prowadzić do nowych obiektów. Na przykład trójlistnik jest własnym rewersem: $3_1 = \mathrm{r}\, 3_1$, ale nie lustrem.

Dlatego wyróżniamy pięć typów symetrii splotów:

Definicja 2.1.3 — sploty zwierciadlane, odwracalne, chiralne. Niech L będzie splotem. Wtedy L jest równoważny ze swoim rewersem, lustrem, rewersem lustra, wszystkimi albo żadnym z trzech wymienionych splotów; splot L nazywamy odpowiednio:

- odwracalnym ($L = rL$),
- dodatnio zwierciadlanym ($L = mL$),
- ujemnie zwierciadlanym ($L = mrL$),
- całkowicie zwierciadlanym ($mL = L = rL$),
- całkowicie chiralnym ($mL \neq L \neq rL$).

Węzły całkowicie chiralne nazywa się czasem skrętnymi.

■ **Przykład 2.1.4** Węzeł 9_{32} jest całkowicie skrętny. ■

■ **Przykład 2.1.5** Trójlistnik jest odwracalny, ale nie zwierciadlany. ■

Przypuszczał to już Listing [271] w 1847 roku, ale pierwszy dowód podał dużo później, bo w 1914 roku Dehn [109]. Oto, jak tego dokonał.

Niedowód. Iloraz grafu Cayleya dla grupy podstawowej trójlistnika, $G = \pi_1(S^3 - K)$, zanurza się w produkt $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, co pozwala wyznaczyć grupę zewnętrznych automorfizmów grupy G, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Korzystając z południków i równoleżników pokazał następnie, że nietrywialny automorfizm zewnętrzny odwraca orientację przestrzeni otaczającej. ■

My przekonamy się o tym po wyznaczeniu wielomianu Jonesa trójlistnika (wniosek 5.2.17). Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 79] wyprowadzają ten sam wynik z własności węzłów rozwłóknionych.

■ **Przykład 2.1.6** Węzeł 8_{17} jest zwierciadlany ujemnie, ale nie odwracalny. ■

Nieodwracalności 8_{17} dowiedli niezależnie około 1979 roku Kawauchi [217] oraz Bonahon, Siebenmann [45].

Sześćdziesiąt lat temu matematycy nie byli pewni, czy węzły nieodwracalne w ogóle istnieją [140, problem 10]; obecnie wiadomo, że nieodwracalne są prawie wszystkie węzły (Murasugi [328, s. 46]). W roku 1962 Ralph Fox wskazał kilku kandydatów do tego tytułu. Hale Trotter odkrył rok później nieskończoną rodzinę nieodwracalnych precli, patrz 7.3.9.

■ **Przykład 2.1.7** Węzeł $12a_{427}$ jest zwierciadlany dodatnio, ale nie odwracalny. ■

Żaden inny węzeł pierwszy o mniej niż 13 skrzyżowaniach nie ma tej cechy.

■ **Przykład 2.1.8** Ósemka 4_1 jest całkowicie zwierciadlana. ■

To najprostszy typ symetrii, wystarczy jawnie wskazać przekształcenie między diagramem węzła, jego lustra oraz odwrotności.

Tait odnosił wrażenie, że zwierciadlane węzły mają parzysty indeks skrzyżowań, ale Hoste, Thistlethwaite znaleźli w 1998 kontrprzykład o piętnastu skrzyżowaniach, 15_{700}. (Czwarta) hipoteza Taita jest prawdziwa dla węzłów pierwszych, alternujących.

Poniższa tabela oparta jest (kolejno) o ciągi 51766, 51769, 51768, 51767, 52400, z bazy danych „The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences" (OEIS).

skrzyżowania	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
całkowicie skrętne	0	0	0	0	0	0	2	27	187	1103	6919	37885
odwracalne	1	0	2	2	7	16	47	125	365	1015	3069	8813
− zwierciadlane	0	0	0	0	0	1	0	6	0	40	0	227
+ zwierciadlane	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	6
zwierciadlane	0	1	0	1	0	4	0	7	0	17	0	41

Tabela 2.1: Liczba węzłów pierwszych o poszczególnych typach symetrii

Definicja 2.1.9 Niech $K \subseteq S^3$ będzie węzłem. Jeśli istnieje inwolucja pary (S^3, K), która zachowuje orientację sfery, ale odwraca orientację węzła, to węzeł K nazywamy silnie odwracalnym.

To jest definicja 10.3.2 z monografii Kawauchiego [219].

Fakt 2.1.10 Jeśli węzeł jest silnie odwracalny, to jest też odwracalny.

Hipotezę, że każdy odwracalny węzeł jest też silnie odwracalny, postawił Montesinos [226, problem 1.6], on też zdefiniował klasę silnie odwracalnych węzłów [302]. Jednakże...

Fakt 2.1.11 Istnieją odwracalne węzły, które nie są silnie odwracalne.

Dowód. Stosowne przykłady podali niezależnie od siebie Hartley [178, s. 183] oraz Whitten [467] (węzeł K jest silnie odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego dubel jest silnie nieodwracalny, wynika stąd, że pewien dubel 8_{17} nie jest silnie odwracalny; jednocześnie Schubert [400, s. 235] pokazał, że duble są odwracalne). ■

Ale hiperboliczny węzeł odwracalny jest silnie odwracalny, wspomina o tym bez dowodu Kawauchi.

Fakt 2.1.12 Każdy wielomian Alexandera jest realizowany przez pewien silnie odwracalny węzeł.

Niedowód. Sakai [392] dla każdego cyklicznego modułu Alexandera M skonstruował silnie odwracalny węzeł K, którego modułem Alexandera jest właśnie M. ■

2.2 Węzły okresowe

Można wyróżnić jeszcze jeden rodzaj symetrii.

Definicja 2.2.1 Węzeł K nazywamy n-okresowym, jeśli istnieje obrót $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o kąt $2\pi/n$ wokół pewnej prostej l, rozłącznej z węzłem K, taki że $f(K) = K$.

Zamiast obrotów można rozpatrywać dowolne odwzorowania okresowe $f\colon S^3 \to S^3$, których zbiór punktów stałych jest rozłączny z węzłem K, homeomorficzny z S^1 oraz które trzymają węzeł K w miejscu, ale dostaje się wtedy dokładnie taką samą klasę węzłów. Czemu? Wynika to z hipotezy Smitha, otrzymanej z połączenia głębokich teorii dotyczących geometrii i topologii 3-rozmaitości. Kawauchi [219, s. 125] odsyła tu do książki Morgana, Bassa [304], gdzie znajdziemy problem, jego historię i rozwiązanie.

Fakt 2.2.2 Zbiór wszystkich okresów jest niezmiennikiem węzłów.

Nieodwracalny węzeł 8_{17} nie posiada żadnych okresów. Węzeł 5_1 jest 5-okresowy, co widać na standardowym diagramie, oraz 2-okresowy, tę drugą symetrię można dostrzec na diagramie realizującym liczbę mostową. Trójlistnik ma dokładnie dwa okresy, 2 i 3. Ogólniej, jak głosi Kawauchi [219, ćwiczenie 10.1.9]:

Fakt 2.2.3 Jedynymi okresami węzła (p, q)-torusowego są dzielniki liczb p oraz q.

Murasugi podał dwa warunki, które musi spełniać węzeł o okresie $n = p^r$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Do ich zrozumienia potrzebujemy dwóch definicji.

Definicja 2.2.4 Niech f będzie obrotem z definicji 2.2.1, zaś $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/f \simeq \mathbb{R}^3$ rzutem na przestrzeń ilorazową. Wtedy $p(K)$ nazywamy *węzłem ilorazowym*, zaś K to jego n-krotne nakrycie.

Ładny rysunek węzła ilorazowego znaleźliśmy u Kawauchiego [219, s. 122].

Definicja 2.2.5 Niech l, K będą zorientowanymi prostą oraz węzłem, które nie są do siebie styczne. Wtedy różnicę między liczbą skrzyżowań dodatnich oraz ujemnych wzdłuż półprostej (bez znaku) nazywamy indeksem zaczepienia λ węzła $p(K)$.

Fakt 2.2.6 — warunek Murasugiego. Niech K będzie węzłem o okresie $n = p^r$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Niech J będzie jego węzłem ilorazowym, z indeksem zaczepienia λ. Wtedy wielomian Δ_J jest dzielnikiem wielomianu Δ_K oraz istnieje pewna całkowita liczba k, taka że

$$\Delta_K(t) \equiv \pm t^k \Delta_J(t)^n \left(1 + t + t^2 + \ldots + t^{\lambda-1}\right)^{n-1} \mod p. \tag{2.1}$$

Podobny warunek dla innych wielomianów opisuje Przytycki [367, s. 168].

Niedowód. Murasugi [323] każe rachować mozolnie na macierzach, których wyznacznikiem jest wielomian Alexandera. Kawauchi [219, s. 122-124] przedstawia inny dowód: rozpatruje najpierw szczególny przypadek węzła torusowego $T_{n,d}$, którego węzłem ilorazowym jest niewęzeł. W ogólnym przypadku, korzysta z relacji kłębiastej dla wielomianu Conwaya. Detale oraz odsyłacze do dalszych prac znaleźć można w jego przeglądowej publikacji. ■

Z prac Borodzika (m.in. [48] napisanej z Grabowskim, Królem i Marchwicką) dowiedzieliśmy się, że podany wyżej warunek Murasugiego jest tylko jednym z wielu ograniczeń, jakie musi spełniać węzeł okresowy. Autorzy wymieniają:

- warunek Murasugiego udoskonalony przez Davisa, Livingstona [108],

- kryterium Naika z homologiami rozgałęzionego nakrycia [330],
- kryterium Traczyka z wielomianem Jonesa [441],
- kryterium Przytyckiego z wielomianem HOMFLY-PT [366],
- kryterium Naika z niezmiennikiem Cassona-Gordona,
- kryterium Hillmana, Livingstona, Naika ze skręconym wielomianem Alexandera [186],
- kryterium Jabuki, Naika z homologią Floera [197],
- kryteria Borodzika, Politarczyka z homologią Chowanowa, [360], [50],
- kryterium Chena z grupą podstawową [78].

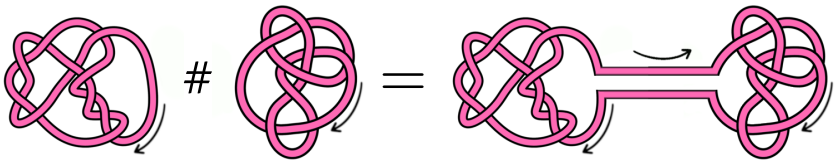
2.3 Suma niespójna i suma spójna

Definicja 2.3.1 — suma niespójna. Niech L_1 oraz L_2 będą splotami, które leżą po różnych stronach ustalonej płaszczyzny w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Teoriomnogościową sumę $L_1 \sqcup L_2$ nazywamy sumą niespójną splotów L_1 i L_2.

Definicja 2.3.2 — suma spójna. Niech K_1, K_2 będą zorientowanymi węzłami. Natnijmy każdy z nich w dwóch punktach tego samego krótkiego łuku, a następnie zszyjmy dwoma łukami, które nie przecinają już istniejących, jak na obrazku. Otrzymany węzeł nazywamy sumą spójną węzłów K_1 oraz K_2 i oznaczamy przez $K_1 \# K_2$.

Sumę spójną wprowadził Schubert [399], jak wspominają Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 21].

■ **Przykład 2.3.3** Suma spójna $10_{17} \# 9_{44}$:



■

W topologii rozważa się podobną operację: z każdej n-rozmaitości wycina się kulę, po czym skleja wzdłuż brzegowej sfery w jedną rozmaitość. Ale kiedy zajmujemy się węzłami, nie interesuje nas struktura rozmaitości (gdyż każdy węzeł jest homeomorficzny z okręgiem), tylko zanurzenie w otaczającą przestrzeń. Pojęcie sumy spójnej węzłów (oraz opisane później satelity) wprowadził do matematyki Schubert [399].

Żadnego elementu definicji 2.3.2 nie można pominąć:

- *składniki K_1, K_2 muszą być zorientowane*. Węzeł prosty, czyli suma dwóch przeciwnie skręconych trójlistników, ma zerową sygnaturę i jest plastrowy. Węzeł babski, czyli suma tak samo skręconych trójlistników ma niezerową sygnaturę. (To jedno z niewielu miejsc, gdzie nomenklatura pochodzi od żeglarzy.) Uzasadnienie, że te węzły są różne, nie jest łatwym zadaniem. Fox twierdzi, że Seifert [405] wiedział o tym. Pokazał też w króciutkim artykule [135], że ich dopełnienia nie są homeomorficzne.

- *składniki K_1, K_2 muszą być węzłami, nie splotami*. Nie istnieje kanoniczny wybór, które ogniwa łączyć ze sobą.
- *zszywajace łuki nie mogą przecinać diagramów*. Cromwell [101, s. 90] pokazuje przykład dwóch niewęzłów, z których otrzymano niepoprawnie dwie różne sumy, 6_1 oraz 8_{20}.

Fakt 2.3.4 Suma spójna węzłów jest dobrze określonym działaniem. Jest przemienna oraz łączna; niewęzeł stanowi jej element neutralny.

Estetyczny rysunek uzasadniający tezę znajdziemy u Burdego, Zieschanga [64, s. 98].

Dowód. Niech dane będą węzły K_1 oraz K_2 oraz dwa różne łuki γ_1, γ_2, których można użyć do konstrukcji sumy spójnej. Skurczmy K_1 tak, by był bardzo mały, przeciągnijmy najpierw przez łuk γ_1, a następnie wzdłuż węzła K_2 do miejsca, gdzie zaczyna się łuk γ_2. Na koniec odwróćmy proces, z łukiem γ_2 w miejscu łuku γ_1.

Prosty dowód drugiego zdania pozostawiamy Czytelnikowi. ■

Algebra powiedziałaby, że węzły z sumą spójną tworzą półgrupę, podobnie jak liczby naturalne z działaniem dodawania. Do bycia grupą brakuje istnienia elementów przeciwnych. Znane są nam co najmniej trzy różne sposoby na uzasadnienie tego faktu.

Najpierw wywnioskowaliśmy to z własności powierzchni Seiferta i ich genusu: faktów 6.2.19 oraz 6.2.25. O tym samym dowodzie wspomina Kawauchi [219, s. 33], a fakt nazywa twierdzeniem o nieanulowaniu. Potem poznaliśmy szwindel Mazura, technikę dowodzenia bardziej przystępną dla kogoś, kto nie zna topologii algebraicznej, ale niestety wykorzystującą węzły dziki. Długo myśleliśmy, że inaczej się nie da, ale elementarny dowód istnieje! Trzeba zajrzeć do [215, s. 18-20] dla dwóch rysunków tamże.

Fakt 2.3.5 Niech K_1, K_2 będą takimi węzłami, że $K_1 \# K_2 = \bigcirc$. Wtedy $K_1 = K_2 = \bigcirc$.

Niedowód. Technika ta zwana jest szwindlem Mazura. Załóżmy, że $K \# L = \bigcirc$ i dopuśćmy wyjątkowo węzły dzikie. Skonstruujmy sumę $K \# L \# K \# \ldots$, przy czym kolejne składniki powinny zmniejszać się, aby ich suma nadal była węzłem. Wtedy

$$\begin{aligned} K &\simeq K \# [(L \# K) \# (L \# K) \ldots] \\ &\simeq (K \# L) \# (K \# L) \# \ldots \simeq \bigcirc \# \bigcirc \# \ldots \simeq \bigcirc. \end{aligned}$$

Analogicznie pokazujemy, że $L \simeq \bigcirc$. To jedyne miejsce w całej książce, gdzie użyte zostają (zostały?) węzły dzikie. ■

Dowód. (Jak pan Kauffman [215, s. 18-20] napisał). Wyobraźmy sobie, że węzeł oraz torus połykająco-podążający T został zawieszony między dwiema ścianami pokoju i załóżmy nie wprost, że suma $K = K_1 \# K_2$ jest trywialna. Wtedy pewien homeomorfizm pokoju, który nie rusza ścian, prostuje sumę: zamienia pozornie zaplątany węzeł K w odcinek L.

Niech π będzie dowolną płaszczyzną zawierającą wyprostowaną sumę K. Tnie część wspólną torusa T oraz ścian w czterech punktach, oznaczmy je A, B (na lewej ścianie) oraz C, D (na prawej). Zauważmy, że π tnie T w łukach, które wychodzą z A, B, C, D oraz pewnych zamkniętych krzywych. Łuk wychodzący z punktu A nie może łączyć go z punktami B lub D, ponieważ te leżą po drugiej stronie odcinka L na płaszczyźnie π.

Łuk AC przedstawia niewęzeł. Jednocześnie jest on obrazem pewnego łuku, który łączył końce torusa T, zatem musi być równoważny z węzłem-towarzyszem. ■

Półgrupę węzłów z operacją sumy spójnej można uczynić grupą na dwa sposoby: albo zmieniając działanie, albo osłabiając równoważność węzłów. Drugi pomysł jest lepszy niż pierwszy. Na początku lat pięćdziesiątych Milnor wprowadził pojęcie zgodności. Element neutralny nowej grupy to węzły plastrowe, ich opis leży w sekcji 7.8. Zgodność i plastrowe węzły to zagadnienia zakorzenione w czterowymiarowej topologii.

Kawauchi [219, s. 50-53] opisuje $2n$-sumę Murasugiego tak, że 2-suma to nasza suma spójna, zaś 4-suma to „PLUMBING" (coś, czego nie znamy) i dodaje komentarz, że jest bardzo przydatna do badania powierzchni Seiferta czy genusu. Została wprowadzona dawno temu w [319], by szacować stopień wielomianu Alexandera alternujących węzłów.

Innym uogólnieniem jest suma paskowa, patrz [219, s. 31-32, 43], specjalny przypadek hiperbolicznej transformacji splotu oraz fuzji splotu.

2.4 Węzły pierwsze

Suma spójna jest dla węzłów tym, czym mnożenie dla liczb naturalnych. Analogia ta nabiera sensu, gdy zdefiniujemy węzły pierwsze, odpowiedniki liczb pierwszych. Do ich dobrego zrozumienia warto znać powierzchnie Seiferta (ale przy pierwszym czytaniu nie trzeba).

Definicja 2.4.1 — węzeł pierwszy. Niech K będzie węzłem różnym od niewęzła. Jeśli nie przedstawia się jako suma spójna $K_1 \# K_2$ dwóch nietrywialnych węzłów K_1, K_2, nazywamy go węzłem pierwszym. W przeciwnym razie mówimy, że jest złożony.

Pokażemy później, że rozkład na węzły pierwsze istnieje i wspomnimy, dlaczego jest jedyny. Fakt 6.2.25 stanowi odpowiednik zasadniczego twierdzenia arytmetyki (i jest od niego trochę trudniejszy w dowodzie). Każdy węzeł jest sumą spójną siebie oraz niewęzła, dlatego byłoby miło, gdyby niewęzeł nie dał się zapisać jako suma dwóch innych węzłów. Jest to dokładnie wniosek 6.2.26: suma spójna nie posiada elementów odwrotnych.

Pewne kryteria pierwszości konkretnych splotów oparte o prace Nakanishiego na temat supłów znaleźć można u Kawauchiego [219, s. 38-41].

Przesmyk to wąskie skrzyżowanie między dwiema rozłącznymi częściami diagramu.

Fakt 2.4.2 Niech L będzie alternującym splotem bez przesmyków. Jeśli diagram splotu L jest spójny, to splot jest nierozszczepialny. Jeśli splot nie jest rozszczepialny, to jest też pierwszy jeśli dla każdego okręgu przecinającego diagram w dwóch niepodwójnych punktach, przekrój wnętrza okręgu z diagramem jest łukiem.

Innymi słowy, jeśli alternujący splot jest złożony, widać to bezpośrednio na każdym jego alternującym diagramie. Jako pierwszy pokazał to Menasco [294]. Jego dowód opiera się na multiplikatywności wielomianu BLM/Ho.

Czy węzłów pierwszych jest nieskończenie wiele? Tak, patrz fakt 6.2.30, potrafimy nawet oszacować liczbę K_n węzłów pierwszych oraz L_n splotów pierwszych. W roku 1987 Ernst, Sumners [125] w oparciu o dowód hipotez Taita pokazali, że $K_n \geqslant \frac{1}{3}(2^{n-2} - 1)$, przy czym węzły lustrzane traktowane są jako różne. Dokładniej:

Fakt 2.4.3 Niech $f(n)$ oznacza liczbę węzłów dwumostowych o indeksie skrzyżowanio-

wym n. Wtedy

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2^{n-2} - 1) & \text{dla } n = 2k \geqslant 4 \\ \frac{1}{3}(2^{n-2} + 2^{(n-1)/2}) & \text{dla } n = 4k+1 \geqslant 5 \\ \frac{1}{3}(2^{n-2} + 2^{(n-1)/2} + 2) & \text{dla } n = 4k+3 \geqslant 7 \end{cases} \tag{2.2}$$

Welsh [464] rozpatruje węzły bez orientacji i znajduje poniższe ograniczenia:

Fakt 2.4.4 Niech K_n (odpowiednio: L_n) oznacza liczbę węzłów (splotów) pierwszych o n skrzyżowaniach. Wtedy

$$2.68 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{K_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{L_n} \leqslant \frac{27}{2}. \tag{2.3}$$

Niedowód. Dolne ograniczenie bierze się ze zliczenia alternujących splotów Montesinosa. Dowód górnego korzysta z teoriografowych wyników Tuttego oraz wzoru Stirlinga. ■

Stojmenow [421] pokazał jakiś czas później, jak poprawić górne ograniczenie do

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{L_n} \leqslant \frac{\sqrt{13681} + 91}{20} \approx 10.398 \tag{2.4}$$

i wytłumaczył, czemu jego metody z funkcjami tworzącymi nie można użyć do dalszych poprawek. Dla splotów dolną granicą jest co najmniej 4 (w miejsce 2.68).

Pytanie, czy zwykłe granice istnieją, pozostaje otwarte (stan na 2004?).

II Niezmienniki

3 Niezmienniki numeryczne 45
3.1 Indeks skrzyżowaniowy 46
3.2 Liczba gordyjska 46
3.3 Liczba mostowa 50
3.4 Indeks zaczepienia 52
3.5 Liczba patykowa 53
3.6 Długość sznurowa 54
3.7 Podsumowanie 55

4 Niezmienniki kolorowe 57
4.1 Kolorowanie splotów 57
4.2 Etykietowanie 61
4.3 Macierz kolorująca 62
4.4 Grupa kolorująca 66
4.5 Kwandle i wraki 69

5 Niezmienniki wielomianowe 73
5.1 Wielomian Alexandera 73
5.2 Wielomian Jonesa 81
5.3 Wielomian HOMFLY-PT 95
5.4 Wielomian BLM/Ho 98
5.5 Wielomian Kauffmana 99
5.6 Niezmienniki Wasiljewa 100

6 Topologia algebraiczna 111
6.1 Grupa węzła 111
6.2 Powierzchnie i macierze Seiferta 116
6.3 Niezmiennik Arfa 131
6.4 Homologie Chowanowa 132

3. Niezmienniki numeryczne

Wspomnieliśmy na s. 25, że pytanie, czy dwa dane diagramy splotów przedstawiają ten sam czy różne sploty, bywa trudne. Napomknęliśmy też, że świadkiem równości dwóch splotów jest ciąg ruchów Reidemeistera, natomiast niezmienników używa się do wykazania różności. Czym jest niezmiennik? To pewna wielkość, która nie ulega zmianie (w naszym przypadku: podczas izotopii otaczającej przestrzeni, w której jest zanurzony splot). Jeśli dany niezmiennik przyjmuje różne wartości dla dwóch splotów, to nie mogą być równoważne.

Jak pisze Przytycki w „Dwustu latach teorii węzłów", kiedy badamy nowy niezmiennik, powinniśmy zadać sobie trzy pytania. Dobrze byłoby o nich nie zapominać. Oto pytania Przytyckiego:

1. czy łatwo wyznaczyć wartość niezmiennika?
2. czy w zbiorze wartości niezmiennika łatwo odróżnia się elementy?
3. czy niezmiennik odróżnia wiele splotów?

Poznaliśmy dotychczas dwa niezmienniki: liczbę ogniw (którą łatwo wyznaczyć i której wartości – liczby naturalne – łatwo odróżniać; ale nie odróżnia wielu splotów) oraz topologię dopełnienia splotu (tym razem odróżnia wszystkie węzły pierwsze, ale trudno wyznaczyć jej „wartość"). Tutaj przedstawiamy kilka więcej; przede wszystkim te, które nie wymagają mocnej znajomości reszty książki. Niektóre z nich są miarą złożoności splotów zgodnie z następującym przepisem: niech f będzie pewną funkcją określoną dla dowolnego diagramu splotu. Wtedy odwzorowanie

$$f(L) = \min\{f(D) : D \text{ jest diagramem splotu } L\} \tag{3.1}$$

stanowi niezmiennik splotów. Dowód jest trywialny i pozostawiamy go jako ćwiczenie dla Czytelnika. Im większa wartość funkcji f, tym bardziej skomplikowany splot.

Później poznamy inne niezmienniki, oprócz opisanych poniżej miarą złożoności jest też liczba warkoczowa (definicja 7.1.11), ale nie wyznacznik (definicja 4.3.2) czy sygnatura (definicja 6.2.44). Przekonamy się też, że istnieją użyteczne niezmienniki, które są wielomianami albo innymi obiektami algebraicznymi.

3.1 Indeks skrzyżowaniowy

Opisując notację Alexandera-Briggsa w podsekcji 1.2.3 wspomnieliśmy już raz o indeksie skrzyżowaniowym.

Definicja 3.1.1 Niech L będzie splotem. Minimalną liczbę skrzyżowań, jakie muszą się pojawić na diagramie przedstawiającym splot L nazywamy indeksem skrzyżowaniowym i oznaczamy krótko $\operatorname{cr} L$.

Pytanie, czy indeks skrzyżowaniowy jest addytywny, to jeden z najstarszych problemów teorii węzłów.

Hipoteza 3.1.2. *Niech K_1 oraz K_2 będą węzłami. Wtedy* $\operatorname{cr} K_1 + \operatorname{cr} K_2 = \operatorname{cr}(K_1 \# K_2)$.

Oto częściowe odpowiedzi. Jeśli K_1, K_2 są alternującymi węzłami o odpowiednio c_1, c_2 skrzyżowaniach, to istnieje alternujący diagram ich sumy $K_1 \# K_2$ o $c_1 + c_2$ skrzyżowaniach. Kauffman [212, twierdzenie 2.10], Murasugi [325, wniosek 6] oraz Thistlethwaite [432, wniosek 1] pokazali niezależnie, że diagram ten jest minimalny.

Thistlethwaite rozszerzył wynik do tak zwanych węzłów adekwatnych: sam [433] albo razem z Lickorishem [266] (tak przynajmniej sugeruje Malutin [284, s. 3], nie widzimy tego). Mając diagram węzła K, można wygładzić wszystkie skrzyżowania dodatnio i dostać splot złożony z rozłącznych okręgów. Jeżeli zmiana dowolnego wygładzenia na ujemne sprawia, że liczba ogniw splotu zmniejsza się, diagram nazywamy dodatnio adekwatnym. Węzeł dodatnio adekwatny to taki, który posiada jakiś dodatnio adekwatny diagram. Analogicznie definiuje się ujemną adekwatność. Węzeł, który jest dodatnio oraz ujemnie adekwatny, nazywamy krótko adekwatnym.

Na początku XXI wieku Diao [114] oraz Gruber [174] niezależnie udowodnili hipotezę 3.1.2 dla pewnej szerokiej klasy węzłów, obejmującej wszystkie węzły torusowe, wiele węzłów alternujących oraz jeszcze inne obiekty, których nie chcemy opisywać.

Lackenby [250] pokazał, że dla pewnej stałej $N \leqslant 152$ zachodzi

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{cr} K_i \leqslant \operatorname{cr}\left(\#_{i=1}^{n} K_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{cr} K_i. \tag{3.2}$$

(Tylko pierwsza nierówność jest ciekawa). Jego argumentu wykorzystującego powierzchnie normalne nie można poprawić tak, by otrzymać stałą $N = 1$. Jednocześnie od 2009 roku nie widać postępu nad hipotezą.

3.2 Liczba gordyjska

Definicja 3.2.1 Niech L będzie splotem. Minimalną liczbę skrzyżowań, które trzeba odwrócić na pewnym jego diagramie, by dostać niewęzeł, nazywamy liczbą gordyjską i oznaczamy $\mathrm{u}\, L$.

Zgodnie z „klasyczną” definicją, między odwracaniem kolejnych skrzyżowań mamy prawo wykonać izotopie otaczające; natomiast zgodnie ze „standardową” definicją, takie izotopie są zabronione. Obie definicje są równoważne: tłumaczy to książka Adamsa [2, s. 58]. (Książka nie tłumaczy, czemu te dwie definicje zostały określone akurat takimi przymiotnikami.)

Lemat 3.2.2. *W dowolnym rzucie splotu można odwrócić pewne skrzyżowania tak, by uzyskać diagram niesplotu.*

(To jest [64, ćwiczenie E 1.6, s. 15].)

Dowód. Bez straty ogólności załóżmy, że diagram przedstawia węzeł. Ustalmy zatem diagram węzła i wybierzmy jakiś początkowy punkt na nim, różny od skrzyżowania wraz z kierunkiem, wzdłuż którego będziemy przemierzać węzeł. Za każdym razem, kiedy odwiedzamy nowe skrzyżowanie, zmieniamy je w razie potrzeby na takie, przez które przemieszczamy się wzdłuż górnego łuku. Skrzyżowań już odwiedzonych nie zmieniamy wcale.

Teraz wyobraźmy sobie nasz nowy węzeł w trójwymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$, przy czym oś z skierowana jest z płaszczyzny, w której leży diagram, w naszą stronę. Umieśćmy początkowy punkt tak, by jego trzecią współrzędną była $z = 1$.

Przemierzając węzeł, zmniejszamy stopniowo tę współrzędną, aż osiągniemy wartość 0 tuż przed punktem, z którego wyruszyliśmy. Połączmy obydwa punkty (początkowy oraz ten, w którym osiągamy współrzędną $z = 0$) pionowym odcinkiem. Zauważmy, że kiedy patrzymy na węzeł w kierunku osi z, nie widzimy żadnych skrzyżowań.

Oznacza to, że nasza procedura przekształciła początkowy diagram w diagram niewęzła, co należało okazać. ■

Nakanishi [333] znalazł 2-gordyjski diagram 1-gordyjskiego węzła 6_2, a po trzynastu latach udowodnił, że każdy nietrywialny węzeł ma diagram, który nie jest 1-gordyjski [334]. Jego wyniki uogólnia praca Taniyamy [431]: dla każdego nietrywialnego splotu istnieje diagram wymagający odwrócenia dowolnie wielu skrzyżowań.

Fakt 3.2.3 Niech L będzie nietrywialnym splotem. Dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ istnieje diagram D splotu L taki, że u $D \geqslant n$.

Pokazany jest tam jeszcze jeden godny uwagi fakt. Jeśli odwrócenie pewnych skrzyżowań daje niewęzeł, to odwrócenie pozostałych także. Zatem dla splotów L o n skrzyżowaniach mamy $2\,\mathrm{cr}\, L \leqslant n$. Nie jest to zbyt pomocne, daje rozstrzygnięcie pięć razy dla pierwszych węzłów do 12 skrzyżowań: 3_1, 5_1, 7_1, 9_1, $11a_{367}$. Ale…

Fakt 3.2.4 Jeśli liczba gordyjska diagramu D węzła K wynosi $\frac{1}{2}(\mathrm{cr}\, D - 1)$, to węzeł jest $(2, p)$-torusowy albo wygląda jak diagram niewęzła po pierwszym ruchu Reidemeistera.

W powyższym stwierdzeniu nie można zastąpić słowa „węzeł” przez „splot”.

Sploty 1-gordyjskie

Sploty o liczbie gordyjskiej 1 zasługują na szczególną uwagę.

Fakt 3.2.5 Niech L będzie wymiernym splotem 1-gordyjskim. Wtedy na minimalnym diagramie L jedno ze skrzyżowań jest rozwiązujące.

Niedowód. Kanenobu, Murakami dla węzłów [208], po chwili Kohn dla splotów [235]. ■

Fakt 3.2.6 Węzły 1-gordyjskie są pierwsze.

Podejrzewał to Hilmar Wendt w 1937 roku, kiedy policzył liczbę gordyjską węzła babskiego używając homologii rozgałęzionego nakrycia cyklicznego [465].

Niedowód. W pracy [394] z 1985 roku Scharlemann podał dość zawiłe uzasadnienie, w które zamieszane były grafy planarne. Obecnie znamy prostsze dowody: najpierw Zhang [474] zauważył, że wynika to z prac Lickorisha [260], Gordona, Lueckego [169], Kima, Tollefsona [223]. Potem Lackenby napisał [249]: stamtąd wiemy, że Scharlemann powtórzył dowód, tym razem wykorzystując rozmaitości szwowe. ■

Scharlemann pokazał w [395, wniosek 1.6], że liczba gordyjska jest podaddytywna, to znaczy zachodzi $\mathrm{u}(K_1 \# K_2) \leqslant \mathrm{u}(K_1) + \mathrm{u}(K_2)$. Stąd oraz z faktu 3.2.6 wynika, że suma dwóch 1-gordyjskich węzłów jest 2-gordyjska, ale od początku teorii węzłów podejrzewano dużo więcej, że liczba gordyjska jest addytywna:

Hipoteza 3.2.7. *Niech K_1, K_2 będą węzłami. Wtedy* $\mathrm{u}(K_1 \# K_2) = \mathrm{u}(K_1) + \mathrm{u}(K_2)$.

Niech K będzie 1-gordyjskim węzłem o genusie 1. Wtedy K jest dublem pewnego węzła (Scharlemann, Thompson [396], Kobayashi [232]). Dużo później Coward, Lackenby dowiedli w [98], że z dokładnością do pewnej relacji równoważności, tylko jedna zmiana skrzyżowania rozwiązuje węzeł K; chyba że ten jest ósemką – wtedy takie zmiany są dwie.

Znane wartości

Cha, Livingston [77] podają, że znamy liczby gordyjskie wszystkich węzłów pierwszych do dziesięciu skrzyżowań poza dziewięcioma wyjątkami: 10_{11}, 10_{47}, 10_{51}, 10_{54}, 10_{61}, 10_{76}, 10_{77}, 10_{79}, 10_{100} (gdzie nie mamy pewności, czy $\mathrm{u} = 2$, czy $\mathrm{u} = 3$). Kto pierwszy znalazł liczbę gordyjską którego węzła postaraliśmy się bezbłędnie przepisać z bazy danych KnotInfo[1]. Według KnotInfo oprócz węzłów torusowych, tych wymienionych poniżej oraz 1-gordyjskich, do 10 skrzyżowań mamy jeszcze 2 węzły o siedmiu skrzyżowaniach, 3 o ośmiu, 15 o dziewięciu i 68 o dziesięciu, których liczba gordyjska zdaje się należeć do folkloru matematycznego.

rok	węzły i odkrywcy ich liczb gordyjskich
1982	7_4 (Lickorish [260])
1986	$8_4, 8_6, 8_8, 8_{12}, 9_5, 9_8, 9_{15}, 9_{17}, 9_{31}$ (Kanenobu, Murakami [208])
1989	9_{25} (Kobayashi [233])
1994	10_8 (Adams [2, s. 62]?)
1998	$10_{65}, 10_{69}, 10_{89}, 10_{97}, 10_{108}, 10_{163}, 10_{165}$ (Miyazawa [299]), $10_{154}, 10_{161}$ (Tanaka [430])
1999	10_{67} (Traczyk [443])
2000	8_{16} (Murakami, Yasuhara [316])
2002	$10_{139}, 10_{145}, 10_{152}, 10_{154}, 10_{161}$ (Gibson, Ishikawa [156])
2004	$8_{18}, 9_{37}, 9_{40}, 9_{46}, 9_{48}, 9_{49}, 10_{86}, 10_{103}, 10_{105}, 10_{106}, 10_{109}, 10_{121}, 10_{131}$ (Stojmenow [422]; ostatni węzeł zdaje się być jedynym 1-gordyjskim na tej liście!)
2005	$9_{29}, 10_{79}, 10_{81}, 10_{87}, 10_{90}, 10_{93}, 10_{94}, 10_{96}, 10_{148}, 10_{151}, 10_{153}$ (Gordon, Luecke [171]), 8_{10}, $10_{48}, 10_{52}, 10_{54}, 10_{57}, 10_{58}, 10_{64}, 10_{68}, 10_{70}, 10_{77}, 10_{110}, 10_{112}, 10_{116}, 10_{117}, 10_{125}$, $10_{126}, 10_{130}, 10_{135}, 10_{138}, 10_{158}, 10_{162}$ (Ozsváth, Szabó [351]), 10_{83} (Nakanishi [335])
2008	$9_{10}, 9_{13}, 9_{35}, 9_{38}, 10_{53}, 10_{101}, 10_{120}$ (Owens [348])

Dolne ograniczenia liczby gordyjskiej

Dokładna wartość liczby gordyjskiej jest znana tylko dla niektórych klas węzłów, na przykład torusowych (fakt 7.5.12) albo skręconych.

[1] Patrz https://knotinfo.math.indiana.edu/descriptions/unknotting_number.html

Borodzik oraz Friedl podali niedawno całkiem mocne ograniczenia na liczbę gordyjską w pracach [46] i [47]. Ich narzędziem jest parowanie Blanchfielda. Poprawiają tam starsze estymaty wynikające z sygnatury Levine'a-Tristrama, indeksu Nakanishiego oraz przeszkody Lickorisha. Wśród pierwszych węzłów o co najwyżej 12 skrzyżowaniach dwadzieścia pięć ma liczbę gordyjską równą co najmniej trzy, trudno było uzasadnić to innymi metodami.

Przykład Nakanishiego-Bleilera. Hipoteza Bernharda-Jablana

Najpierw Nakanishi [333], a potem Bleiler [37] odkryli fascynujący przykład wymiernego węzła 10_8, który jest 2-gordyjski, ale świadkiem tego nie może być żaden diagram minimalny, ponieważ, co jeszcze bardziej fascynujące, węzeł ten posiada tylko jeden diagram o dziesięciu skrzyżowaniach oraz liczbie gordyjskiej 3. Wynika stąd, że liczba u nie musi być osiągana przez diagram minimalny, wbrew powszechnym jeszcze w latach 70 przypuszczeniom. Praca [28] zawiera indukcyjny dowód faktu, że żaden minimalny diagram węzła oznaczanego w notacji Conwaya przez $C(2m+1,1,2m)$ nie daje się rozwiązać w m ruchach, ale pewne nieminimalne diagramy dają się. Przypadek $m=2$ odpowiada węzłowi 10_8.

Przykład Bleilera pokazuje, że do szukania liczby gordyjskiej potrzeba wyrafinowanego algorytmu. Ponieważ odwrócenie jednego ze skrzyżowań na minimalnym diagramie węzła 10_8 daje 1-gordyjski węzeł $4_1, 5_1, 6_1$ lub 6_2, możemy liczyć, że każdy diagram minimalny ma skrzyżowanie, którego odwrócenie zmniejsza liczbę gordyjską. Dlatego w latach 90. Bernhard [28] i Jablan [194] postawili hipotezę:

Hipoteza 3.2.8 (Bernharda-Jablana)**.** *Niech K będzie węzłem z diagramem D, który realizuje liczbę gordyjską* u K*. Istnieje wtedy skrzyżowanie, którego odwrócenie daje nowy diagram D' nowego węzła K' o mniejszej liczbie gordyjskiej:* $1 + \mathrm{u}\, D' = \mathrm{u}\, D$.

Przypuszczenie to sprawdzono dla węzłów do jedenastu skrzyżowań oraz splotów o dwóch ogniwach do dziewięciu skrzyżowań (Kohn w [236]?). Gdyby hipoteza 3.2.8 była prawdziwa dla wszystkich węzłów, mielibyśmy prosty sposób na wyznaczenie liczby u K: weźmy skończenie wiele diagramów minimalnych dla węzła K, na każdym z nich odwracajmy skrzyżowania i rekursywnie szukajmy liczb gordyjskich prostszych węzłów. Najmniejsza spośród nich różni się wtedy o jeden od liczby u K.

Brittenham, Hermiller w artykule [53] twierdzą, że hipoteza jest fałszywa. Kontrprzykład został znaleziony komputerowo, z pomocą programu SnapPy.

■ **Przykład 3.2.9 — Brittenham, Hermiller.** Hipoteza Bernharda-Jablana jest fałszywa dla co najmniej jednego spośród czterech węzłów: $12n_{288}$, $12n_{491}$, $12n_{501}$, $13n_{3'370}$. ■

Bleiler [37] postawił problem: czy jeden węzeł może mieć kilka diagramów minimalnych, z których tylko niektóre są świadkiem 1-gordyjskości? Rozwiązanie przyszło z Japonii: według Kanenobu, Murakamiego [208] dzieje się tak m.in. dla węzła 8_{14}. Stojmenow w pracy [417] pełnej różnych przykładów wskazał dodatkowo węzły $14_{36'750}$ oraz $14_{36'760}$.

Liczba gordyjska jako metryka

Mając dane dwa węzły K_0, K_1, rozpatrzmy wszystkie homotopie

$$f\colon [0,1]\times S^1 \to \mathbb{R}^3 \tag{3.3}$$

takie, że wszystkie funkcje f_t są zanurzeniami z co najwyżej jednym punktem podwójnym. Zażądajmy dodatkowo, by styczne do krótkich łuków, które przecinają się w tym punkcie, były od siebie różne. Odległością gordyjską między węzłami K_0, K_1 jest minimalna liczba

podwójnych punktów, jakie posiada homotopia f. Twierdzenie C z pracy Gambaudo, Ghysa [151] głosi, że przestrzeń wszystkich węzłów wyposażona w taką metrykę zawiera prawie idealną kopię przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru. Dokładniej:

Fakt 3.2.10 Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ istnieje funkcja $\xi : \mathbb{Z}^n \to \mathcal{K}$, dodatnie stałe A, B, C i norma $\|\cdot\|$ na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ takie, że spełniona jest podwójna nierówność

$$A\|x-y\| - B \leqslant d(\xi(x), \xi(y)) \leqslant C\|x-y\|. \tag{3.4}$$

To nie jest koronne twierdzenie tamże, tylko efekt uboczny pracy nad głównym wynikiem: autorzy definiują ω-sygnaturę domknięcia warkocza, a że sklejenie dwóch 4-rozmaitości z narożnikami nie odpowiada dodaniu ich sygnatur, to ich funkcja nie jest homomorfizmem. Wspomniany jest wzór Novikowa-Walla, który wyraża różnicę pewnych defektów jako indeks Masłowa i (to jest główne twierdzenie) różnica ta pokrywa się z kocyklem Meyera reprezentacji Burau-Squiera, cokolwiek to znaczy. Pojawia się również jakaś funkcja Rademachera.

Grupy warkoczowe poznamy w sekcji 7.1.

Inne operacje rozwiązujące węzły

Shimizu w pracy [408] rozpatruje różne operacje, które rozwiązują węzły lub sploty. Nie będziemy się nimi zajmować, podamy tylko przykład: zamiana pod- i nadskrzyżowań wokół obszaru na diagramie rozwiązuje węzły, ale nie sploty; kontrprzykładem jest splot Hopfa. (Ciąg dalszy tamtej pracy razem z Oshikirim, Tamurą [347]). Patrz też, co pisze Kawauchi w [219, s. 141-154].

Mieliśmy też:

Hipoteza 3.2.11. *Dowolny splot można rozwiązać wykonując ciąg 3-ruchów (zastępując dwie równoległe nici przez trzy półskręty lub odwrotnie).*

Ze zbioru problemów Kirby'ego [226] wiemy, że Nakanishi zastanawiał się nad tym w 1981 roku. Przytycki [367, s. 199] wspomniał, że „może wydawać się dziwne, że tak elementarny problem (...) jest otwartym". Nie to samo, ale podobne pytanie zadał wcześniej Montesinos w związku z nakryciami i dlatego Kirby nazwał problem hipotezą Nakanishiego-Montesinosa. Conway zauważył, że hipoteza jest prawdziwa dla węzłów algebraicznych. Coxeter rozprawił się z nią dla prawie wszystkich splotów o indeksie warkoczowym mniejszym niż 6 oraz indeksie mostowym mniejszym niż 4. Nakanishi w 1994 pokazał splot zbudowany z pierścieni Boromeuszy wobec którego podejrzewał, że jest kontrprzykładem. Żeby zdobyć więcej informacji o postępie prac nad hipotezą, musieliśmy sięgnąć po artykuł Przytyckiego, Dąbkowskiego [122]. Chen w 1999 zasugerował inny kontrprzykład, domknięcie 5-warkocza $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^{10}$. Artykuł [122] dowodzi, że te dwa sploty istotnie obalają hipotezę. Używa się w nim nieprzemiennej wersji n-kolorowań Foxa, tak zwanej n-tej grupy Burnside'a splotu.

Nakanishi w 1979, a więc zanim ogłosił powyższą hipotezę, miał wrażenie, że 4-ruchy rozwiązują wszystkie sploty. Najpierw sprawdzono, że jest prawdziwa dla wszystkich dwu- i trzymostowych węzłów, a także węzłów do 12 skrzyżowań, ale potem Askitas ogłosił, że pewien węzeł o 16 skrzyżowaniach obala ją. Później pojawili się inni podejrzani, ale nie wiemy, czy naprawdę są kontrprzykładami.

3.3 Liczba mostowa

Wprowadzona w 1954 przez Schuberta [401].

Definicja 3.3.1 Niech L będzie splotem. Minimalną liczbę mostów, czyli długich łuków, które biegną tylko przez nadskrzyżowania, jakie muszą się pojawić na diagramie, który przedstawia splot L nazywamy liczbą mostową i oznaczamy krótko $\operatorname{br} L$.

W 2012 roku Musick [329] znalazł liczbę mostową węzłów pierwszych o 11 skrzyżowaniach: węzły, które nie są ani wymierne, ani Montesinosa, są trzymostowe. Po ośmiu latach pchnięto granicę wiedzy do 12 skrzyżowań, dokonał tego międzynarodowy zespół: Blair, Kjuczukowa, Velazquez, Villanueva [36].

Jedynym węzłem jednomostowym jest niewęzeł. Kolejne w hierarchii skomplikowania, czyli dwumostowe, to domknięcia wymiernych supłów (piszemy o nich w podsekcji 7.2.1). Fukuhama, Ozawa, Teragaito [147] pokazali, że trzymostowe węzły genusu jeden są preclami. Hilden, Montesinos, Tejada, Toro [184] klasyfikują wszystkie trzymostowe węzły przy użyciu tak zwanej reprezentacji motylkowej, podobnej do wyniku Schuberta z sekcji 7.2.1.

Fakt 3.3.2 Węzły n-mostowe rozkładają się na sumę dwóch wymiernych n-supłów.

Co ciekawe, powyższe stwierdzenie nie pada nigdzie poza stroną BRIDGE NUMBER na angielskiej Wikipedii; może być trywialne w dowodzie albo wręcz fałszywe.

Fakt 3.3.3 Niech K_1, K_2 będą węzłami. Wtedy $\operatorname{br}(K_1) + \operatorname{br}(K_2) = \operatorname{br}(K_1 \# K_2) + 1$.

Niedowód. Schubert [401, s. 279] pokazał to blisko pół wieku temu. Nowszy dowód pochodzi od Schultens [404], skorzystała z foliacji na brzegu węzła towarzyszącego satelitarnemu. Ale dokładniejszy opis powyższych prac wykraczałby poza zakres tego opracowania, więc zostanie pominięty. ■

Murasugi wspomina w rozdziale 4.3 podręcznika [328] następującą hipotezę, nie podaje jednak wcale, skąd się wzięła:

Hipoteza 3.3.4 (mostowo-skrzyżowaniowa). *Niech K będzie węzłem. Wtedy* $\operatorname{cr} K \geqslant 3 \operatorname{br} K - 3$, *przy czym równość zachodzi dokładnie dla niewęzła, trójlistnika i sumy spójnej trójlistników.*

Należy więc uzupełnić brakujące informacje. Murasugi [326] przypuszcza, że dla splotów o μ ogniwach zachodzi nierówność $\operatorname{cr} L + \mu - 1 \geqslant 3 \operatorname{br} L - 3$, przedstawia jednocześnie dowód jej szczególnego przypadku, dla alternujących splotów algebraicznych. Hipoteza Murasugiego stanowi uogólnienie dużo starszego problemu pochodzącego od Foxa [134], który zapytał, czy nierówność jest prawdziwa dla węzłów, gdy $\mu = 1$.

Fakt 3.3.5 Nie istnieje bezpośredni związek między liczbą mostową oraz gordyjską.

Wiemy o tym z książki Livingstona [274, s. 146].

Dowód. Niech K_n będzie węzłem $(2, 2n+1)$-torusowym. Wtedy K_n jest dwumostowy i jego liczba gordyjska wynosi n, to jest dokładnie treść hipotezy Milnora (patrz fakt 7.5.12).

Livingston pisze, że Schubert [401, s. 281] udowodnił następujący wynik. Jeśli węzeł K' jest dublem węzła K, to $\operatorname{br} K' = 2 \operatorname{br} K$ chyba, że K jest niewęzłem (Livingston mówi tylko, że jest jakiś wyjątek i każe go znaleźć). Zatem wielokrotne dublowanie prowadzi do węzłów o dowolnie dużej liczbie mostowej. Duble są 1-gordyjskie: rysunek 7.12 w książce Livingstona [274, s. 146] świetnie to pokazuje. ■

3.3.1 Spin

Niektórzy, na przykład Przytycki, używają określenia „liczba Taita", ale nam się ono nie podoba, więc proponujemy nasze, lepsze.

Definicja 3.3.6 — spin. Niech D będzie diagramem zorientowanego splotu L. Wtedy sumę wszystkich znaków skrzyżowań diagramu:

$$\operatorname{wr} D = \sum_c \operatorname{sign} c, \tag{3.5}$$

nazywamy jego spinem (diagramu, nie splotu!).

Co ważne, spin nie jest niezmiennikiem splotów ani węzłów. Para Perko przedstawia ten sam węzeł z minimalną liczbą skrzyżowań i spinem równym siedem lub dziewięć. Dzięki temu przez wiele lat nie została dostrzeżona. Spin jest za to niezmiennikiem węzłów alternujących, mówi o tym druga hipoteza Taita.

Lemat 3.3.7. *Spin nie zależy od orientacji diagramu. Tylko I ruch Reidemeistera zmienia spin:*

$$\operatorname{wr}\left(\right) = \operatorname{wr}\left(\right) - 1. \tag{3.6}$$

Pozostałe ruchy nie mają na niego wpływu.

3.4 Indeks zaczepienia

Około 1833 roku Gauß wyraził indeks zaczepienia dwóch węzłów jako pewną (nieciekawą dla nas) całkę, co czyni go najstarszym niezmiennikiem splotów. Po przeczytaniu [92] wydaje nam się, że osiągnął to korzystając z praw fizyki: prawa Ampère'a i Biota-Savarta. My żyjemy w XXI wieku, wystarczy nam diagramatyczna definicja, jak pan Brunn obmyślił w 1892 roku: (Ale patrz też: [219, s. 11].)

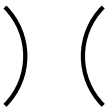
Definicja 3.4.1 — znak. Liczbę ± 1 przypisaną do skrzyżowania zgodnie z regułą:

$$\operatorname{sgn}\left(\right) = +1 \qquad \operatorname{sgn}\left(\right) = -1$$

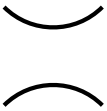
nazywamy znakiem skrzyżowania.

Skrzyżowania dodatnie to takie, w których obrócenie dolnego łuku w prawo daje górny łuk, dlatego czasem nazywa się je także praworęcznymi. Oczywiście skrzyżowania ujemne nazywamy wtedy leworęcznymi.

Definicja 3.4.2 — wygładzenie. Diagramy powstałe przez zmianę biegu łuków danego skrzyżowania zgodnie z poniższymi rysunkami:



(a) wygładzenie dodatnie



(b) wygładzenie ujemne

nazywamy wygładzeniem. Jeżeli nie zaznaczono inaczej, wygładzamy zgodnie ze znakiem skrzyżowania.

Definicja 3.4.3 — indeks zaczepienia. Niech $L = K_1 \sqcup K_2$ będzie splotem o dwóch ogniwach, zaś D jego diagramem. Wielkość

$$\mathrm{lk}(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_i \operatorname{sgn} c_i, \tag{3.7}$$

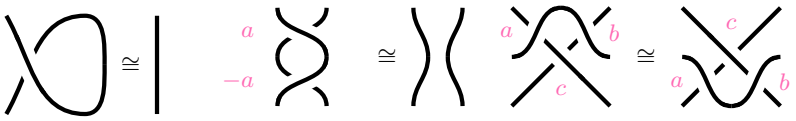
gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie skrzyżowania, na których spotykają się łuki różnych ogniw, nazywamy indeksem zaczepienia węzłów K_1, K_2. Ogólniej, jeśli dany jest splot $L = K_1 \sqcup \ldots \sqcup K_n$ posiadający n ogniw, to jego indeks zaczepienia wyznacza wzór

$$\mathrm{lk}(L) = \sum_{i<j} \mathrm{lk}(K_i, K_j). \tag{3.8}$$

Zauważmy, że indeks zaczepienia splotu Hopfa wynosi 1, natomiast splotu Whiteheada 0. Są zatem różne. W obydwu przypadkach indeks zaczepienia jest liczbą całkowitą. Istotnie, na mocy twierdzenia Jordana lk jest funkcją o całkowitych wartościach.

Fakt 3.4.4 Indeks zaczepienia jest dobrze określonym niezmiennikiem zorientowanych splotów.

Dowód. Wielkość lk L jest sumą znaków pewnych skrzyżowań, zatem na mocy twierdzenia Reidemeistera wystarczy sprawdzić, jaki jest wpływ ruchów Reidemeistera na te składniki:



(a) ruch R_1 (b) ruch R_2 (c) ruch R_3

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι… ■

3.5 Liczba patykowa

Definicja 3.5.1 Niech L będzie splotem. Minimalną liczbę odcinków łamanej, która przedstawia splot L, nazywamy jego liczbą patykową i oznaczamy $\mathrm{s}(L)$.

Liczbę patykową s do matematyki wprowadził Randell [374], a w kolejnej pracy [375] znalazł jej wartość dla niewęzła (3), trójlistnika (6), ósemki (7) i pozostałych węzłów pierwszych do sześciu skrzyżowań: $5_1, 5_2, 6_1, 6_2, 6_3$ (8). Według Cromwella [101], z węzłami od siedmiu

do dziewięciu częściowo rozprawiali się Randell [374], Calvo [69] i Negami [336]. Niedawno dołączył do nich Shonkwiler [410]. Baza danych KnotInfo podpowiada, jaki jest obecny stan wiedzy.

Jest siedem węzłów z s $K = 8$: wymienione wcześniej, 8_{19} i 8_{20}; dwadzieścia pięć gdzie s $K = 9$; oprócz tego s $10_{124} = 10$. O pozostałych węzłach pierwszych do 10 skrzyżowań wciąż brakuje nam danych. Zachodzi $9 \leqslant \mathrm{s}\, 10_{37}$, s $10_{76} \leqslant 12$, dla pozostałych węzłów mamy lepsze oszacowania. 88 węzłów spełnia $9 \leqslant \mathrm{s}\, K \leqslant 11$, zaś 124 innych $9 \leqslant \mathrm{s}\, K \leqslant 10$.

Encyklopedia Wolfram Mathworld plecie farmazony, że dokładnie jeden węzeł pierwszy do 10 skrzyżowań ma liczbę patykową równą 14: jest to 10_{84}, dokładnie pięć ma liczbę patykową równą 13: 10_{39}, 10_{64}, 10_{73}, 10_{76}, 10_{80}, a liczba patykowa pozostałych nie przekracza 12. Niestety Wolfram nie podaje źródeł tych rewelacji. Ugh!

Negami [336] pokazał przy użyciu teorii grafów, że dla nietrywialnych węzłów prawdziwe są nierówności

$$\frac{5 + \sqrt{9 + 8\,\mathrm{cr}\,K}}{2} \leqslant \mathrm{s}\, K \leqslant 2\,\mathrm{cr}\,K. \tag{3.9}$$

Trójlistnik to jedyny węzeł realizujący górne ograniczenie. Z pracy Elrifaia [124] (a wiemy o niej z [193]) wynika, że dla węzłów o co najwyżej 26 skrzyżowaniach, dolne ograniczenie jest ostre: można pisać $<$ w miejsce $\leqslant$.

Jin oraz Kim w 1993 ograniczyli liczby patykowe dla węzłów torusowych korzystając z liczby supermostowej. Wkrótce wynik został poprawiony przez samego Jina, który w pracy [201] znalazł dokładne wartości dla niektórych węzłów. I tak, jeśli $2 \leqslant p < q < 2p$, to s $T_{p,q} = 2q$ oraz s $T_{p,2p} = 4p - 1$. Ten sam wynik, choć dla węższego zakresu parametrów, odkryli Adams, Brennan, Greilsheimer, Woo [6]. Autorzy niezależnie od siebie znaleźli proste oszacowanie z góry dla liczby patykowej sumy spójnej:

$$\mathrm{s}(K_1 \,\#\, K_2) \leqslant \mathrm{s}(K_1) + \mathrm{s}(K_2) - 3. \tag{3.10}$$

Koniec dekady przyniósł jeszcze jedną pracę McCabe z nierównością $\mathrm{s}(K) \leqslant 3 + \mathrm{cr}(K)$ dla węzłów dwumostowych ([292]) oraz odkrycie Calvo [70]: jeśli ograniczymy się do łamanych o co najwyżej siedmiu odcinkach, ósemka przestaje być odwracalna.

Na początku XXI wieku nierówności Negamiego poprawiono, z dołu dokonał tego Calvo [70], z góry natomiast Huh, Oh [193]. Górne ograniczenie można zmniejszyć o $3/2$, jeżeli K jest niealternującym węzłem pierwszym.

$$\frac{7 + \sqrt{1 + 8\,\mathrm{cr}\,K}}{2} \leqslant \mathrm{s}\, K \leqslant \frac{3}{2}(1 + \mathrm{cr}\,K). \tag{3.11}$$

Liczba patykowa nie pojawia się już nigdzie w następnych rozdziałach.

3.6 Długość sznurowa

Matematyczne węzły nie mają grubości i można je dowolnie rozciągać. Długość sznurowa, najsłabiej poznany niezmiennik numeryczny, pochodzi z fizycznej teorii węzłów, która bierze pod uwagę obiekty wykonane z nieelastycznych materiałów.

Definicja 3.6.1 Niech L będzie splotem o długości l, który posiada rurowe otoczenie bez samoprzecięć z przekrojem poprzecznym o promieniu τ (mówimy, że L ma grubość τ). Iloraz

$$\mathrm{len}\, L = \frac{l}{\tau} \tag{3.12}$$

nazywamy długością sznurową splotu.

Przez wiele lat zastanawiano się: czy można zawiązać węzeł ze sznura o długości jednej stopy i promieniu jednego cala? Lub równoważnie:

Hipoteza 3.6.2. *Czy istnieje nietrywialny węzeł K taki, że* $\operatorname{len} K \leqslant 12$*?*

Na początku XXI wieku wiedzieliśmy dzięki Cantarelli, Kusnerowi, Sullivanowi [71], że najkrótszy węzeł ma długość co najmniej $(2+\sqrt{2})\pi \approx 10.726$, krótko po tym Diao [113, s. 14] udzielił negatywnej odpowiedzi na pytanie.

■ **Przykład 3.6.3** Rozumowanie Denne, Diao, Sullivana [112] oparte o czterosieczne pokazuje, że długość sznurowa nietrywialnego węzła wynosi co najmniej 15.66. Ale eksperymenty komputerowe mówią nam, że długość trójlistnika nie przekracza 16.372, więc oszacowanie jest dość ostre. ■

Prowadzono obszerne poszukiwania na temat zależności między długością sznurową i innymi niezmiennikami. Mamy na przykład:

Fakt 3.6.4 Istnieją stałe c_1, c_2 takie, że $c_1 \operatorname{cr}^{3/4} K \leqslant \operatorname{len} K \leqslant c_2 \operatorname{cr}^{3/2} K$.

Udowodniono, że dolnym ograniczeniem na czynnik c_1 jest $(4\pi/11)^{3/4} \approx 1.105$ (gdyż tak pisze Cantarella i inni w [71, tw. 23]). Wiemy też dzięki Klotzowi i Maldonado [228], że stała c_1 nie może przekraczać 12.64, w przeciwnym razie nierówność nie zachodziłaby dla węzła torusowego $T_{3,5}$. Dowód górnego ograniczenia opiera się na cyklach Hamiltona w grafach zanurzonych w kratach liczbowych (Yu [116]).

Obydwa ograniczenia poprawiono. Klotz, Maldonado [228] piszą, że Diao dostał:

Fakt 3.6.5 Niech K będzie węzłem. Wtedy

$$\frac{1}{2}\left(17.334 + \sqrt{17.334^2 + 64\pi \operatorname{cr} K}\right) \leqslant \operatorname{len} K. \tag{3.13}$$

To oszacowanie jest lepsze dla węzłów do 1850 skrzyżowań (chociaż nigdy nie widzieliśmy takiego potwora na własne oczy).

Fakt 3.6.6 Niech K będzie węzłem. Wtedy $\operatorname{len} K = O(\operatorname{cr} K \cdot \log^5(\operatorname{cr} K))$.

Niedowód. Świeży wynik Diao, Ernsta, Pora, Zieglera [115], którego dowód też wykorzystuje kraty liczbowe. ■

Jakościowy wynik znaleźliśmy znowu w [228]: zachodzi $\operatorname{len} L \leqslant a_u \operatorname{cr} K \log^5 \operatorname{cr} K$ (nie tylko dla węzłów, ale też splotów), przy czym stała a_u musi być większa od $8\pi/\log^5 2 \approx 78.5$, by dobrze ograniczała splot Hopfa.

Przywołajmy pracę [228] jeszcze jeden, ostatni raz. Badania satelitów do 42 skrzyżowań pokazały, że satelita jest zazwyczaj trzy razy dłuższy niż jego towarzysz.

Długość sznurowa nie pojawia się w dalszych rozdziałach.

3.7 Podsumowanie

(Podana dalej lista może być niezrozumiała przy pierwszym czytaniu). Między niektórymi niezmiennikami nie ma bezpośredniego związku:

1. między liczbą gordyjską i mostową (fakt 3.3.5),
2. między liczbą mostową i genusem (wzmianka po fakcie 3.3.5),
3. między defektami modulo różne liczby pierwsze (fakt 4.3.14),
4. między liczbą mostową i wielomianem Alexandera (fakt 5.1.17),
5. między wielomianem Jonesa i Alexandera (paragraf przed faktem 5.3.8),
6. między liczbą mostową i sygnaturą (wniosek 6.2.46),
7. między liczbą gordyjską i wielomianem Alexandera (dowód faktu 6.2.54).

Ale między niektórymi innymi takie związki są:

1. między indeksem skrzyżowaniowym i genusem [274, s. 142],
2. między liczbą gordyjską i sygnaturą [274, s. 142].

4. Niezmienniki kolorowe

Cztery cechy węzłów poznane w poprzednim rozdziale: liczba gordyjska, mostowa i patykowa oraz indeks skrzyżowaniowy są dla nas kompletnie bezużyteczne. Ich użyteczność dla nas jest ograniczona, bo nie widać wcale, jak wyznaczyć wartość którejkolwiek z nich. Dlatego teraz wprowadzimy 3-kolorowanie, z którym nie dość, że będziemy odróżniać pewne węzły od niewęzła, to jeszcze odróżnimy te węzły od siebie!

Splot nazywamy 3-kolorowalnym, jeżeli jego włókna dają się pokolorować trzema barwami tak, by nie złamać magicznych reguł (które podamy). Nie potrzeba przewidującej przyszłość kuli, żeby wpaść na pomysł rozszerzenia palety do większej liczby barw. Dalej uogólniać można na dwa sposoby: albo zastępujac kolory elementami nieprzemiennej grupy (i dostać etykietowania), albo zamiast zliczać kolorowania zbadać relacje między nimi. Wstęp nie jest miejscem na tłumaczenie detali, więc wspomnimy krótko, że grupy $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ oraz $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ są równoliczne, ale nie izomorficzne, bo tylko jedna z nich jest cykliczna.

Ani kolorowanie, ani etykietowanie nie są zupełne: to znaczy istnieją węzły, których nie potrafią od siebie odróżnić. Wszystkie niezmienniki poza całką Koncewicza na pewno mają tę wadę. Całka Koncewicza (opisana w sekcji 5.6) być może też jest wadliwa. Nie wiadomo.

4.1 Kolorowanie splotów

Przygodę z kolorowaniami rozpoczyna się zazwyczaj od trójkolorowalności. Jest to pewna cecha diagramów, którą można posiadać albo nie.

Definicja 4.1.1 — trójkolorowalność. Niech D będzie diagramem splotu L, którego łuki występują w trzech kolorach. Jeżeli spełnione są następujące warunki:

- nie wszystkie łuki są tego samego koloru,
- przy każdym skrzyżowaniu spotykają się albo trzy łuki w trzech różnych kolorach, albo wszystkie tego samego koloru,

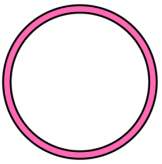
to mówimy, że diagram D jest trójkolorowalny.

Splot posiadający trójkolorowalny diagram nazywamy krótko trójkolorowalnym. Często można spotkać się też z trójkolorowalnością Foxa, szczególnie w anglojęzycznych materiałach, ale my nie czujemy potrzeby używania długiej nazwy.

■ **Przykład 4.1.2** Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec hendrerit felis nec sollicitudin scelerisque. Etiam odio urna, faucibus eget sodales a, sollicitudin ut odio. Interdum et malesuada fames ac ante ipsum primis in faucibus. Sed metus urna, vehicula eu efficitur quis, interdum pellentesque tellus. Vestibulum ex neque, sagittis nec hendrerit a, eleifend vitae ligula. Donec ut erat erat.



(a) trójlistnik jest 3-kolorowalny,



(b) niewęzeł nie jest 3-kolorowalny. ■

Tak naprawdę pokazaliśmy tylko, że niewęzeł ma niekolorowalny diagram, ale czy nie może on mieć innego diagramu, który jest kolorowalny? Nie może, co wynika bezpośrednio z faktu 4.1.4.

Dla wygody jako kolorów używać będziemy kolejnych liczb naturalnych $0, 1, \ldots, n-1$ (przez ostatnią stronę mieliśmy $n = 3$). Pozwala to zapisać warunek „być kolorowalnym" równaniem algebraicznym, niezależnie od ilości użytych kolorów.

Definicja 4.1.3 — kolorowanie. Niech L będzie splotem, zaś n liczbą naturalną. Mówimy, że splot L jest kolorowalny modulo n, jeśli posiada diagram, którego włóknom można przypisać liczby całkowite $0, \ldots, n-1$ tak, by

1. istniały dwa włókna różnych kolorów,
2. równanie $a + b \equiv 2c$ modulo n było spełnione przy każdym skrzyżowaniu:



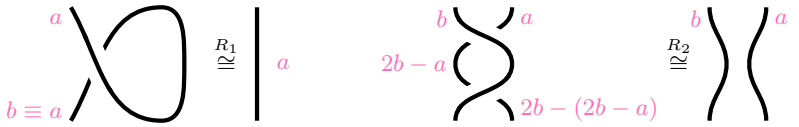
Takie przyporządkowanie nazywamy kolorowaniem.

Nie potrafimy ustalić, kto pierwszy napisał jawnie równanie „$a + b \equiv 2c$ modulo n" myśląc o kolorowaniach. Być może był to Ralph Fox, który około 1956 roku chciał uczynić teorię węzłów bardziej przystępną dla studentów koledżu Haverford w Pensylwanii; on jednak nie pisał „trójkolorowalne węzły", tylko „węzły z własnością L". (Znaczenia litery L także nie potrafimy ustalić). Ale nie wolno zapominać, że już Reidemeister rozpatrywał reprezentacje grupy węzła π na grupę diedralną D_{2n}.

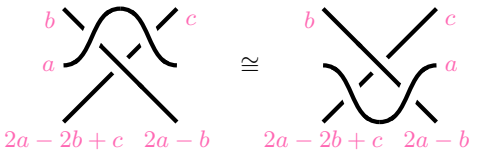
Fakt 4.1.4 Własność „być n-kolorowalnym" jest niezmiennikiem węzłów.

Dowód. Po przypisaniu kolorów górnym włóknom widzimy, że kolory wszystkich pozostałych włókien są wymuszone przez równanie kolorujące przy kolejnych skrzyżowaniach. Dlatego sprawdzimy, że wykonanie dowolnego ruchu Reidemeistera nie psuje kolorowalności reszty diagramu.

Zacznijmy od ruchu pierwszego i drugiego:



Trzeci ruch także nie wymaga skomplikowanych rachunków. Najkrótszy łuk na diagramach ma kolor $2a - c$ po lewej oraz $2b - c$ po prawej stronie.



Ponownie wykonanie ruchu Reidemeistera nie zmienia kolorów dolnych włókien. ■

Trójlistnik koloruje się dokładnie modulo krotności trójki, ósemka zaś – piątki. Sama kolorowalność nie mówi wiele, splot jest kolorowalny lub nie. Dowód faktu 4.1.4 pokazuje coś więcej: liczba kolorowań, być może trywialnych (czyli takich, gdzie użyto tylko jednego koloru), jest mocniejszym niezmiennikiem.

Lemat 4.1.5. *Ustalmy diagram D dla węzła z wybranym łukiem, oraz kolor $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że krótki łuk jest koloru k.*

Kolorem tym zazwyczaj jest 0.

Dowód. Dodanie tej samej wartości do wszystkich łuków na dobrze pokolorowanym diagramie daje nowy, także dobrze pokolorowany diagram. ■

Fakt 4.1.6 Żaden węzeł nie koloruje się modulo dwa.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje nietrywialne kolorowanie. Analiza czterech możliwych skrzyżowań pokazuje, że włókna wychodzące z tunelu muszą mieć ten sam kolor. Przechodząc wzdłuż węzła widzimy jeden kolor, wbrew założeniu nie wprost. ■

Fakt 4.1.7 Każdy splot o co najmniej dwóch ogniwach koloruje się modulo dwa.

Dowód. Wystarczy pomalować jedną składową zerem, a pozostałe jedynkami. ■

Sploty rozszczepialne są n-kolorowalne dla każdego $n \geqslant 2$, można skorzystać z tego samego schematu kolorowania. Pierścienie Boromeuszy nie kolorują się modulo trzy, nie są zatem rozszczepialne.

Sploty, które nie są kolorowalne modulo n dla żadnej liczby $n \in \mathbb{N}$ nazywa się czasem niewidzialnymi, tę własność mają dwa węzły pierwsze o dziesięciu skrzyżowaniach (10_{124}, 10_{153}), cztery o jedenastu ($11n_{34}$, $11n_{42}$, $11n_{49}$, $11n_{116}$) oraz jedenaście o dwunastu ($12n_{19}$, $12n_{121}$, $12n_{210}$, $12n_{214}$, $12n_{242}$, $12n_{292}$, $12n_{309}$, $12n_{313}$, $12n_{318}$, $12n_{430}$, $12n_{473}$).

Pokażemy teraz, że suma równań kolorujących z dobrze wybranymi znakami jest postaci $0 \equiv 0 \mod n$. Jest to składnik w dowodzie na to, że wyznacznik determinuje kolorowalność splotu. Będziemy potrzebować pomocniczej definicji.

Definicja 4.1.8 — uszachowienie. Niech D będzie ustalonym diagramem splotu L. Jego dopełnienie do płaszczyzny składa się z rozłącznych obszarów. Pomalowanie niektórych obszarów tak, żeby każda nić leżała na brzegu dokładnie jednego kolorowego obszaru, nazywamy uszachowieniem diagramu D.

Dla oszczędności tuszu w drukarce zazwyczaj zaczyna się od białej płaszczyzny i używa szarego do kolorowania, ale w tej książce wszędzie, gdzie to tylko możliwe, obecny jest różowy i uszachowienia nie będą stanowić wyjątku.

Ustalmy węzeł K oraz dowolne uszachowienie dla jego diagramu. Skojarzmy z każdym skrzyżowaniem równanie kolorujące, zgodnie z poniższym schematem:



(a) $+a - b + a - c = 0 \mod n$



(b) $-a + b - a + c = 0 \mod n$

Fakt 4.1.9 Sumą równań kolorujących o dobrze wybranych znakach jest $0 \equiv 0 \mod n$.

Dowód. Każde równanie kolorujące składa się z czterech wyrazów, po jednym od każdej nici, która spotyka się w danym skrzyżowaniu. Nić biegnie między dwoma skrzyżowaniami, więc suma wszystkich równań kolorujących składa się z par składników, po jednej parze na nić. Składniki te są przeciwnych znaków, zatem wzajemnie się znoszą. Suma równań kolorujących jest sumą zer, a to należało udowodnić. ■

Liczbę kolorowań splotu L modulo n, trywialnych lub nie, oznaczamy przez $\tau_n(L)$.

Fakt 4.1.10 Niech K_1, K_2 będą węzłami. Wtedy

$$\frac{\tau_3(K_1 \# K_2)}{3} = \frac{\tau_3(K_1)}{3} \cdot \frac{\tau_3(K_2)}{3}. \tag{4.1}$$

Wniosek 4.1.11 Istnieje nieskończenie wiele węzłów.

Dowód. Suma spójna n trójlistników ma 3^{n+1}, trywialnych lub nie, 3-kolorowań. ■

Niskowymiarowa topologia byłaby miałka, gdyby źródłem nieskończoności węzłów była tylko operacja #. O wielu niezmiennikach węzłów złożonych podejrzewamy albo wiemy, że wyrażają się w terminach mniejszych węzłów pierwszych, oprócz wspomnianej tu liczby kolorowań mamy hipotezy 3.1.2, 3.2.7, nienazwane oszacowanie na stronie 54, fakty 4.4.8, 5.1.9, 5.3.6, 6.2.25, 6.2.45, 6.3.6. Na szczęście fakt 4.4.9 głosi, że węzłów pierwszych też jest nieskończenie wiele; po prostu jesteśmy jeszcze za głupi, aby podać jego dowód.

4.2 Etykietowanie

Dotychczas kolorowaliśmy diagramy węzłów liczbami $0, 1, 2, \ldots, n-1$, czyli elementami grupy $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ale nic nie stoi na przeszkodzie, żeby próbować użyć dowolnej innej skończonej grupy. Etykietowalność to niezmiennik, który uogólnia kolorowalność. Poznaliśmy go dzięki książce Livingstona [274, s. 89-99], ale poza panem Charlesem mało kto o nim wspomina!

Definicja 4.2.1 — etykietowanie. Niech G będzie skończenie generowaną grupą, zaś D diagramem zorientowanego węzła K. Surjekcję ze zbioru włókien diagramu D na zbiór generatorów grupy G taką, że przy każdym skrzyżowaniu spełnione jest równanie $g_U g_L = g_R g_U$ (z oznaczeniami jak na rysunku: włókno g_U biegnie górą; włókna g_L, g_R po lewej i prawej stronie podskrzyżowania), nazywamy etykietowaniem diagramu D grupą G. Węzeł, który posiada diagram etykietowalny grupą G też nazywamy etykietowalnym grupą G.



Równanie $g_R = g_U g_L g_U^{-1}$ mówi, że etykiety włókien wchodzących oraz wychodzących są sprzężone. Wynika stąd, że wszystkie etykiety pochodzą z jednej klasy sprzężoności. Muszą jednocześnie generować całą grupę, dlatego G musi być grupą nieprzemienną lub trywialną. Etykietowalność jest niezmiennikiem węzłów i nie zależy od orientacji węzła: jeżeli elementy $g_1, \ldots, g_n$ generują grupę, to ich odwrotności także.

Etykietowania są naturalnym uogólnieniem kolorowań. Dlaczego? Niech $p \geqslant 3$ będzie liczbą pierwszą, natomiast $D_p = \langle r, s \mid r^p = s^2 = e, rsr = s \rangle$ grupą diedralną rzędu $2p$. Elementy tej grupy to $1, r, r^2, \ldots, r^{p-1}, s, sr, \ldots, sr^{p-1}$. „Obrót" r^k jest sprzężony tylko ze swoją odwrotnością (mamy $sr^l r^k (sr^l)^{-1} = sr^k s = r^{-k}$), ale „symetrie osiowe" sr^k tworzą jedną klasę sprzężoności. Łatwo widać, że dowolne dwie z nich generują całą grupę D_p.

Fakt 4.2.2 Węzeł K jest p-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest D_p-etykietowalny.

Dowód. Załóżmy, że K ma n włókien. Wiemy już, że każde D_p-etykietowanie wykorzystuje tylko elementy $sr^{a_1}, \ldots, sr^{a_n}$ dla $1 \leqslant a_i \leqslant p$. Jest ono prawidłowe dokładnie wtedy, gdy analogiczne kolorowanie liczbami $a_1, \ldots, a_n$ jest prawidłowe. ■

Byłoby zabawnie, gdyby etykietowanie okazało się pozornym uogólnieniem. Skoro już o nim wspomnieliśmy, można się domyślić, że tak nie jest. Istotnie, wskażemy teraz parę węzłów, których nie odróżniają kolorowania, ale odróżnia pewne etykietowanie.

■ **Przykład 4.2.3** Węzeł 9_{46} jest etykietowalny grupą S_4, wystarczy jego włóknom dobrze przypisać transpozycje (niech to będzie proste ćwiczenie dla Czytelnika). Węzeł 6_1 nie jest etykietowalny tą samą grupą. Wybranie dwóch etykiet przy jednym skrzyżowaniu wymusza etykiety dla wszystkich włókien, ale dwie grupy nie mogą generować grupy S_4. Węzły te są więc różne. ■

Węzły 6_1 i 9_{46} mają ten sam wielomian Alexandera, zatem ten sam wyznacznik, więc na mocy faktu 4.3.7 te same własności kolorujące. Dużo później odkryliśmy parę jeszcze raz w [64, s. 138], gdzie pokazano, że $E_2(6_1) = \mathbb{Z}(t)$; $E_2(9_{46}) = (t-2, 2t-1)$. Niestety nie wiemy, kto pierwszy wpadł na ten pomysł porównania ich ideałów elementarnych E_2.

Etykietowanie jest mocnym narzędziem odróżniającym węzły. Thistlethwaite w 1985 roku korzystając z niego klasyfikował węzły o co najwyżej 13 skrzyżowaniach (jest ich, jak ostatecznie się okazało, 12965). Mają one tylko 5639 różnych wielomianów Alexandera, ale etykietowania trzynastoma różnymi grupami pozwoliły zmniejszyć liczbę nierozpoznanych węzłów do około tysiąca. Wśród nich 30 posiada wielomian Conwaya $1 + 2z^2 + 2z^4$, ale pary rozróżniane wielomianem HOMFLY mają też różne wielomiany Jonesa.

Kolorowania definiowano kiedyś jako surjekcje $\rho\colon \pi \to D_{2n}$ z grupy podstawowej. Jak mówi prezentacja Wirtingera, grupa splotu generowana jest przez ścieżki z punktu bazowego w S^3 do brzegu rurowego otoczenia splotu, wokół południka i znowu do bazowego punktu. Fox zauważył, że z surjektywności ρ wynika, iż generatory mapują się na symetrie osiowe sr^k. Ponieważ istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między generatorami grupy splotu oraz łukami diagramu, każdemu możemy przypisać liczbę całkowitą k. Etykietowania są więc uogólnieniem kolorowań. Rozumowanie, które przedstawiliśmy, prowadzi do prostej klasyfikacji grup, których można użyć do etykietowania.

Fakt 4.2.4 Niech K będzie węzłem, zaś G grupą. Następujące warunki są równoważne

- węzeł K jest etykietowalny grupą G,
- istnieje surjekcja $\pi_1 \to G$, gdzie π_1 jest grupą podstawową węzła K.

Historycznie, prezentacja Wirtingera była pierwsza, zaś etykietowania odkryto później.

Fakt 4.2.5 — Perko. Niech K będzie węzłem. Następujące warunki są równoważne: K jest etykietowalny grupą S_3, K jest etykietowalny grupą S_4.

Dowód. Dowód zajmuje tylko kilka stron i składa się z dwóch części. Po pierwsze S_4 ma podgrupę czwórkową Kleina, więc istnieje epimorfizm $S_4 \to S_3$; pozwala to opuszczać epimorfizmy $G \to S_4$ do epimorfizmów $G \to S_3$.

Jak podnosić epimorfizmy $G \to S_3$ do epimorfizmów $G \to S_4$ pokazał Perko [354]. ■

Nie znamy innych nietrywialnych faktów dotyczących etykietowań.

4.3 Macierz kolorująca

Zajmiemy się dwoma niezmiennikami pochodzącymi od macierzy kolorującej: defektem oraz wyznacznikiem. Podamy też opis macierzy Goeritza, która prowadzi do tych samych niezmienników, ale pozwala na uniknięcie części rachunków.

Definicja 4.3.1 — macierz kolorująca. Ustalmy diagram bez zamkniętych krzywych dla splotu L z łukami $x_0, \ldots, x_m$ oraz skrzyżowaniami $0, \ldots, m$. Definiujemy macierz A_+, której wyraz a_{lj} jest współczynnikiem przy x_j w l-tym równaniu kolorującym:



Macierz kolorująca A powstaje z macierzy A_+ przez skreślenie dowolnego wiersza oraz dowolnej kolumny.

Zauważmy, że pierwszy ruch Reidemeistera usuwa „zamknięte krzywe", czyli pojedyncze łuki bez skrzyżowań. Diagram bez takich krzywych ma tyle samo skrzyżowań, co łuków. Z każdego skrzyżowania wychodzą (tunelem) dwa włókna mające dwa końce i otrzymana macierz jest kwadratowa.

Wykreślenie wiersza i kolumny jest konieczne. Gdybyśmy tego zaniechali, otrzymana macierz nie byłaby odwracalna, bowiem wiersze sumują się do zera (patrz fakt 4.1.9). Dla alternujących diagramów możemy żądać, by górą i-tego skrzyżowania biegło i-te włókno, wtedy na diagonali macierzy A znajdą się same minus dwójki.

4.3.1 Wyznacznik

Wyznacznik to ciekawa liczba spokrewniona z kolorowaniem. Stanowi szczególny przypadek ciekawego samego w sobie wielomianu Alexandera i pierwszy niezmiennik, którego niezmienniczości ze względu na ruchy Reidemeistera nawet nie będziemy próbować dowodzić.

Definicja 4.3.2 — wyznacznik. Wyznacznikiem splotu nazywamy wyznacznik macierzy kolorującej A bez znaku: $\det K := |\det A_K|$. Przyjmujemy, że $\det \bigcirc := 1$.

Pokażemy później (po poznaniu grupy kolorującej, czyli we wniosku 4.4.6) lub jeszcze później (po wprowadzeniu wielomianu Alexandera, w dowodzie faktu 5.1.4), że wyznacznik splotu jest dobrze określony: nie zależy on od wyboru etykietowania, minora macierzy oraz diagramu i że jest niezmiennikiem. Teraz ograniczymy się do jego kilku własności.

Fakt 4.3.3 Niech L będzie splotem alternującym. Wtedy $\det L \geqslant \operatorname{cr} L$.

Pierwszy niepoprawny dowód pochodzi od Bankwitza [19], który w 1930 roku ograniczył się do węzłów. Poprawny dowód pojawił się dopiero trzy dekady później, kiedy Crowell [103] oparł się o teoriografową pracę Whitneya. Spośród 84 diagramów pierwszych węzłów na końcu podręcznika Reidemeistera, 11 ma niealternujący diagram. Crowell pokazał, że 7 z tych 11 przedstawia niealternujące węzły. Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 265] wspominają, że gdybyśmy rozumieli teorię grafów, wynik dałoby się jeszcze trochę poprawić.

■ **Przykład 4.3.4** $\det 8_{19} = 3 < 8 = \operatorname{cr} 8_{19}$, więc węzeł 8_{19} jest niealternujący. Podobnie dowodzi się, że 9_{42}, 10_{124}, 10_{132}, 10_{139}, 10_{140}, 10_{145}, 10_{153}, 10_{161}, 21 węzłów pierwszych o 11 skrzyżowaniach oraz 75 węzłów pierwszych o 12 skrzyżowaniach nie są alternujące. ■

Niealternujących węzłów o 11 (odpowiednio: 12) skrzyżowaniach jest 185 (888), zatem ta prosta nierówność nie daje niesamowitych efektów. Ale Crowell znalazł też mocniejsze ograniczenie:

Fakt 4.3.5 Niech L będzie pierwszym, alternującym splotem. Wtedy L jest $(2, n)$-torusowy lub zachodzi $\det L + 3 \geqslant 2 \operatorname{cr} L$.

Stąd można wywnioskować, że oprócz węzłów wspomnianych wcześniej, także 8_{20}, 9_{43}, 9_{46}, 10_{125}, 10_{128}, 10_{136}, 10_{142}, 10_{152}, 10_{154}, 10 węzłów pierwszych o 11 skrzyżowaniach oraz 45 węzłów pierwszych o 12 skrzyżowaniach nie są alternujące.

Wyznacznik jest blisko związany z kolorowaniami.

Lemat 4.3.6. *Niech A będzie macierzą $r \times r$ o całkowitych wyrazach. Wtedy następujące warunki są równoważne: istnieje niezerowy wektor $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$ taki, że $Ax \equiv 0 \mod n$; liczby $\det A$ oraz n nie są względnie pierwsze.*

Dowód. Z algebry liniowej wiemy, że dla pewnych odwracalnych całkowitoliczbowych macierzy C, R macierz $RAC = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_m)$ jest diagonalna: to postać normalna Smitha. Istnieje odpowiedniość między niezerowymi rozwiązaniami równania $Ax \equiv 0$ oraz $Dy \equiv 0$, mamy bowiem $x \equiv Cy$, zatem bez straty ogólności możemy przyjąć, że macierz A jest diagonalna.

Niezerowy wektor x taki, że $Ax \equiv 0 \mod n$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją (nie wszystkie zerowe) $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ takie, że dla każdego i mamy $a_i x_i \equiv 0 \mod n$. Mówiąc językiem przeciętnych zjadaczy chleba, dla pewnego i liczby a_i, n nie są względnie pierwsze. Macierz A jest diagonalna, więc jej wyznacznik ma postać $\det A = \pm|a_1| \cdot \ldots \cdot |a_m|$. Wnioskujemy stąd, że liczby $\det A, n$ także nie są względnie pierwsze. ■

Fakt 4.3.7 Splot L koloruje się modulo n wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $\det L$ oraz n nie są względnie pierwsze.

Dowód. Wybierzmy diagram dla splotu L z uporządkowanymi łukami i skrzyżowaniami. Bez straty ogólności ograniczmy się do tych kolorowań, gdzie $x_0 = 0$. Kolorowanie modulo n istnieje dokładnie wtedy, gdy istnieje niezerowy wektor $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ taki, że $Ax \equiv 0 \mod n$. Na mocy lematu oraz definicji $\det L = |\det A|$, dowód zostaje zakończony. ■

Wniosek 4.3.8 Jeżeli wyznacznik splotu L wynosi $\det L = 1$, to splot L jest niewidzialny.

Wniosek 4.3.9 Jeżeli wyznacznik splotu L wynosi $\det L = 0$, to splot L koloruje się modulo wszystkie liczby naturalne.

Wniosek 4.3.10 Niech K będzie węzłem. Wtedy jego wyznacznik, $\det K$, jest liczbą nieparzystą.

Dowód. Wystarczy przypomnieć sobie fakt 4.1.6. ■

Wniosek 4.3.11 Jeśli splot L jest rozszczepialny, to jego wyznacznik wynosi 0.

Dowód. Oczywiste po przeczytaniu akapitu za faktem 4.1.7 jeszcze raz. ■

Poniższy problem pochodzi od Stojmenowa.

Hipoteza 4.3.12 (problem 12.25 w [344]). *Niech n będzie nieparzystą sumą dwóch kwadratów. Czy istnieje pierwszy, alternujący, achiralny węzeł o wyznaczniku n?*

Oto, co już wiemy. Dla $n = 1, 9, 49$ oraz być może pewnej liczby $n > 2000$ niebędącej kwadratem, taki węzeł nie istnieje. Jeśli istnieje achiralny węzeł o wyznaczniku n, to n jest nieparzystą sumą dwóch kwadratów (Hartley [179]). Implikacja odwrotna także jest prawdziwa, od węzła można dodatkowo żądać bycia pierwszym lub alternującym, ale nie zawsze obydwu warunków jednocześnie. Patrz też [423].

4.3.2 Defekt

Definicja 4.3.13 — defekt. Niech K będzie węzłem, zaś A jego macierzą kolorującą modulo p. Wymiar jądra $\ker A$ nazywamy defektem węzła.

Prawdopodobnie jest to ostatnia strona, gdzie wprowadzamy do teorii węzłów nowy termin z algebry liniowej.

Fakt 4.3.14 Defekty modulo różne liczby pierwsze są niezależne od siebie.

Wspomina o tym Livingston [274, s. 145].

Niedowód. Na przykład suma spójna k trójlistników i j węzłów $T_{2,5}$ posiada defekt k modulo 3 oraz j modulo 5. Podobne przykłady istnieją dla innych zbiorów liczb pierwszych. ■

Defekt także jest niezmiennikiem, choć rzadziej używanym (nie pojawia się na żadnej późniejszej stronie w tej książce). Węzeł o defekcie n modulo p posiada $p(p^n - 1)$ kolorowań p kolorami, co jest twierdzeniem 2 z [57]. Węzły 8_{18} oraz 9_{24} mają ten sam wyznacznik, 45. Ich defekty modulo 3 to 1 i 2, zatem są różne.

4.3.3 Macierz Goeritza

Tuż przed wojną Lebrecht Goeritz [160] pokazał, że każdy diagram węzła wyznacza formę kwadratową. Macierz tej formy nie jest niezmiennikiem węzłów, ale jej symbole Hassego oraz wyznacznik (bez znaku) już tak. Ani Kawauchi [219], ani Murasugi [328] nie wspominają explicite odkrycia Goeritza; robią to Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 258-262], za co bardzo im dziękujemy.

Trotter zmodyfikował pomysły Goeritza i otrzymał inną formę kwadratową, sygnatura formy jest niezmiennikiem splotów. Sygnaturę (razem z dalszymi uogólnieniami) opisujemy w późniejszej podsekcji 6.2.5, teraz skupiając się na macierzy Goeritza.

Definicja 4.3.15 Ustalmy uszachowiony diagram D splotu L. Oznaczmy białe obszary $0, 1, \ldots, m$, przy czym 0 jest obszarem nieograniczonym. Przydzielmy skrzyżowaniom znaki:



i wprowadźmy pomocniczą macierz G_+:

$$G_+ = \begin{pmatrix} G_{00} & \cdots & G_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m0} & \cdots & G_{mm} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

gdzie jeśli $i \neq j$, to G_{ij} jest sumą znaków skrzyżowań przyległych do i oraz j. Dla $i = j$, G_{ii} jest minus sumą znaków skrzyżowań wokół j-tego obszaru. Macierz Goeritza powstaje z macierzy G_+ przez skreślenie dowolnego wiersza oraz dowolnej kolumny.

Szukając macierzy G_+, łatwiej wykryć proste błędy rachunkowe: jest mniejsza od macierzy kolorującej, symetryczna, a jej kolumny i wiersze sumują się do zera.

Fakt 4.3.16 Niech D będzie diagramem węzła K. Oznaczmy przez G, A kolejno macierz Goeritza oraz macierz kolorującą tego diagramu. Wtedy $\det G = \pm \det A$.

Niedowód. Notatki z kursu MX4540 w Aberdeen, gdzie pierwszy raz przeczytaliśmy o tej równości, sugerują, że dowód wymaga znajomości topologii algebraicznej, a tego wolelibyśmy uniknąć. Chodzi prawdopodobnie o dowód Lickorisha [261, s. 99]. Ale potem znaleźliśmy artykuł Kolaya [238], który używa tylko algebry liniowej. ■

Macierz Goeritza nie jest niezmiennikiem splotów. Mamy jednak:

Fakt 4.3.17 Niech D_1, D_2 będą dwoma diagramami ustalonego splotu. Wtedy macierz Goeritza G_2 można otrzymać z macierzy G_1 w skończonej liczbie kroków:

- zamiany macierzy G na PGP^{-1}, gdzie P i P^{-1} mają całkowite wyrazy
- dopisania lub skreślenia ± 1 na końcu przekątnej (dla węzłów) albo $-1, 0, 1$ (dla splotów).

Niedowód. Pierwszy był oczywiście piszący po niemiecku Goeritz [160].

Dwie dekady później opublikowana została jeszcze jedna praca po niemiecku Knesera, Puppego [230]. Główny wynik tamże zależy od mało znanego twierdzenia Meyera o liczbie klas form kwadratowych w genusie (?) i równie tajemniczego twierdzenia Eichlera o spinorowych reprezentacjach grupy ortogonalnej (??).

Kyle napisał prawie w tym samym czasie [248] i nie zrobił tego po niemiecku. ■

4.4 Grupa kolorująca

Definicja 4.4.1 Niech L będzie splotem. Abelową grupę generowaną przez łuki diagramu przedstawiającego splot L z równaniami skrzyżowań tegoż diagramu jako relacjami oraz dodatkową relacją „$a = 0$”, gdzie a jest dowolnie ustalonym łukiem, nazywamy grupą kolorującą splot L i oznaczamy przez $\mathrm{Col}(L)$.

Fakt 4.4.2 Splot L koloruje się modulo n, wtedy i tylko wtedy gdy istnieje nietrywialny homomorfizm $\mathrm{Col}(L) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Dowód. Niech a będzie ustalonym łukiem na diagramie splotu L z definicji 4.4.1. Funkcja $\varphi\colon \mathrm{Col}(L) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ jest nietrywialnym morfizmem, jeśli przyjmuje choć raz wartość różną od zera, spełnia warunek $\varphi(a) = 0$ i dla każdego skrzyżowania prawdziwe jest równanie

$$\varphi(x_j) + \varphi(x_k) - 2\varphi(x_i) = 0 \tag{4.3}$$

przy oznaczeniach z definicji 4.1.3. To pokazuje, że niezerowe morfizmy $\mathrm{Col}(L) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ to dokładnie kolorowania modulo n, z kolorem $\varphi(l)$ na łuku l. ■

Homomorfizm $\mathrm{Col}(L) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nie musi być surjekcją, zatem kolorowalność modulo n pociąga za sobą kolorowalność modulo mn (dla każdego naturalnego m).

Fakt 4.4.3 Grupa kolorująca jest z dokładnością do izomorfizmu niezmiennikiem węzłów.

Szkic dowodu. Do wyznaczenia grupy kolorującej potrzebujemy diagramu D z wybranym łukiem a. Musimy zatem sprawdzić, że ustalenie innego diagramu lub łuku prowadzi do grupy izomorficznej z wyjściową. Dla diagramów wystarczy sprawdzić, co dzieje się podczas ruchów Reidemeistera jak w dowodzie faktu 4.1.4. W przypadku łuku rozumowanie przebiega analogicznie do dowodu lematu 4.1.5. ■

Oto metoda pozwalająca na znalezienie grupy kolorującej. Wybierzmy diagram splotu L bez zamkniętych krzywych, etykietowanie $x_0, \ldots, x_m$ dla łuków oraz etykietowanie $0, \ldots, m$ dla skrzyżowań. Utwórzmy macierz kolorującą A. Bezpośrednio z definicji macierzy A wynika, że grupy abelowe $\mathrm{Col}(L)$ oraz $\mathbb{Z}^m / A^t\mathbb{Z}^m$ są izomorficzne. Następnie znajdźmy macierz diagonalną $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_m)$, taką że $D = RAC$, gdzie całkowite macierze R, C mają wyznacznik 1. Z algebry liniowej wiemy, że to zawsze się uda: macierz D nazywamy postacią normalną Smitha. Wtedy funkcja

$$f(x)\colon \frac{\mathbb{Z}^m}{A^t\mathbb{Z}^m} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}^m}{D\mathbb{Z}^m}, \quad f(x) = C^t x \tag{4.4}$$

stanowi izomorfizm, a skoro D jest macierzą diagonalną, to

$$\frac{\mathbb{Z}^m}{D\mathbb{Z}^m} \cong \bigoplus_{k=1}^{m} \frac{\mathbb{Z}}{|d_k|\mathbb{Z}}. \tag{4.5}$$

Dokładnie to samo można uczynić z macierzą Goeritza G zamiast macierzy kolorującej A. Podsumujmy.

Fakt 4.4.4 Niech L będzie splotem z macierzą kolorującą A, zaś $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ postacią normalną Smitha macierzy A. Wtedy grupy

$$\mathrm{Col}(L) \cong \bigoplus_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{Z}}{|d_k|\mathbb{Z}} \tag{4.6}$$

są izomorficzne.

Wniosek 4.4.5 Grupa kolorująca $\mathrm{Col}(L)$ splotu L jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik tego splotu jest niezerowy: $\det L \neq 0$.

Dowód. Przy oznaczeniach z faktu 4.4.4, $\det(L) = |d_1| \cdot \ldots \cdot |d_n|$. ■

Wniosek 4.4.6 Wyznacznik jest niezmiennikiem splotów.

Wyznacznik jest niezmiennikiem słabszym od grupy kolorującej.

■ **Przykład 4.4.7** Węzły 6_1 oraz $3_1 \# 3_1$ mają różne grupy kolorujące: odpowiednio $\mathbb{Z}/9$ oraz $(\mathbb{Z}/3)^2$, ale ten sam wyznacznik, $9 = 3 \times 3$. ■

Jednakowoż wyznacznik jest na tyle mocnym niezmiennikiem, że pozwala elementarnie udowodnić, że węzłów pierwszych jest nieskończenie wiele. Trzeba nam lematu:

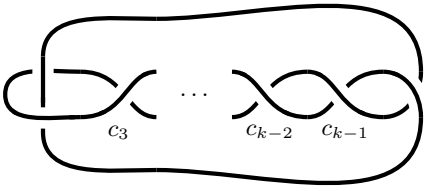
Lemat 4.4.8. *Niech K_1, K_2 będą węzłami. Wtedy* $\det(K_1 \# K_2) = \det(K_1)\det(K_2)$.

Dowód. Dla oszczędności papieru zamiast podać pełen dowód napiszemy tylko, że wynika to z faktów 5.1.9 oraz 5.1.14. (Podczas czytania dowodu faktu 5.1.9 należy zastąpić każde wystąpienie t przez -1). ■

Fakt 4.4.9 Istnieje nieskończenie wiele węzłów pierwszych.

Po poznaniu genusu oraz węzłów skręconych poznamy jeszcze jeden dowód (patrz fakt 6.2.30).

Dowód. Tak jak Cygan dawno temu, rozpatrzmy rodzinę węzłów K_k dla $k \geqslant 4$:



Rysunek 4.3: Węzeł K_k

Niech W_n będzie macierzą $n \times n$, na przekątnej której znajdują się 2, zaś bezpośrednio nad i pod nią – wyrazy -1. W macierzy kolorującej (ze skreślonym wierszem „c_k" oraz kolumną „a_k") zamieńmy miejscami dwie pierwsze kolumny, dodajmy do drugiej dwa razy pierwszą, zaś do drugiego wiersza – dwa razy pierwszy wiersz. Otrzymamy macierz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & W_{k-3} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Powtarzając operacje: zamiana miejscami skrajnie lewych kolumn, dodanie do drugiej $2m+1$ razy pierwszej, odjęcie pierwszego wiersza od trzeciego, czyli sprowadzając naszą macierz do postaci normalnej Smitha przekonamy się, że na jej przekątnej znajdują się wyrazy $-1, -1, \ldots, -1, 2k-3$. To oznacza, że $\det K_k = 2k-3$.

I to już prawie koniec! Wskażemy injekcję ze zbioru liczb pierwszych w zbiór węzłów pierwszych. Niech $2k-3$ będzie liczbą pierwszą. Wtedy któryś składnik w rozkładzie węzła K_k na węzły pierwsze (tak jak w fakcie 6.2.28) musi mieć wyznacznik $2k-3$. Jest jasne (po wniosku 4.4.6), dlaczego te składniki są parami różne. ■

Fakt 4.4.10 Niech $k \geqslant 9$ będzie takie, że wyznacznik węzła K_k jest pewną potęgą 3. Wtedy K_k nie jest splotem trójlistników.

Dowód. Macierz diagonalna otrzymana po wniosku 4.4.6 także jest niezmiennikiem węzłów. (Czemu?). Macierzą dla splotu trójlistników $(3_1)^{\#n}$ trójlistników jest $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 3, \ldots, 3)$, zaś dla węzła K_k: $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 3^n)$. ■

4.5 Kwandle i wraki

Sekcja ta powstała częściowo w oparciu o notatki autorstwa Bergera, Geriga[1] oraz Bergera, Flannery'ego i Sumnichta[2]; ale najlepiej zacząć od długiej na trzy strony odpowiedzi Nelsona [337] na pytanie „czym jest kwandel?". Należy przy tym pamiętać, że jest to dość niszowe zagadnienie, na przykład Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 11] poświęcają mu pięć wierszy i odsyłają Czytelnika do pracy Fenna, Rourkego [130]. Dużo otwartych problemów dotyczących kwandli można znaleźć u Ohtsukiego [344, s. 455-465].

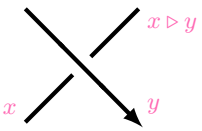
Kwandle pierwszy raz odkryli Conway z Wraithem około 1959 roku, jeszcze jako studenci I stopnia na uniwersytecie w Cambridge, w nieopublikowanej korespondencji między sobą (patrz definicja przed definicją 4.5.1). Ponownie uczyniono to latach 80. XX wieku: Joyce w 1982 jako kwandle, Matwiejow w tym samym roku pod nazwą grupoidy rozdzielne, wreszcie Brieskorn w 1986 jako zbiory automorficzne. Joyce zapytany o znaczenie słowa QUANDLE odparł *„I needed a usable word. Distributive algebra had too many syllables. Piffle was already taken. I tried trindle and quagle, but they didn't seem right, so I went with quandle"*.[3]

Conway nazwał wraki wrakami (WRACKS), by częściowo zażartować z nazwiska jego kolegi Wraitha, a częściowo by zaznaczyć, że są one tym, co zostaje z grupy, w której zapomniano o mnożeniu, ale nie sprzęganiu (w języku angielskim co najmniej od XVI wieku funkcjonuje zwrot „WRACK AND RUIN" oznaczający zniszczenie). Obecnie dominuje określenie RACKS.

4.5.1 Kwandle

Aksjomaty grupy stanowią uogólnienie symetrii, ponieważ składanie symetrii jest łączne, identyczność jest symetrią, funkcja odwrotna do symetrii jest symetrią. Znajdziemy teraz słabo znaną strukturę algebraiczną, która odzwierciedla ruchy Reidemeistera (oraz aksjomatyzuje własności sprzężeń w grupach, choć jest to dla nas mniej interesujące).

Niech X będzie skończonym zbiorem kolorów wyposażonym w działanie $\triangleright\colon X \times X \to X$. Będziemy rysować diagramy węzłów tak, że każdemu łukowi przypisany będzie pewien kolor $x \in X$ zgodnie z następującą regułą (patrz rysunek): kiedy łuk o kolorze x przechodzi pod biegnącym w prawo łukiem koloru y, staje się łukiem w kolorze $x \triangleright y$.



Formalnie:

Definicja 4.5.1 — kwandel. Zbiór X wyposażony w dwuargumentowe działanie $\triangleright$, które dla wszystkich elementów $x, y, z \in X$ spełnia trzy warunki:

1. $x \triangleright x = x$,
2. odwzorowanie $\beta_y\colon X \to X$ dane wzorem $\beta_y(x) = x \triangleright y$ jest odwracalne,
3. $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$,

nazywamy kwandlem.

[1] dostępne pod adresem https://scholar.harvard.edu/files/gerig/files/knotnotes.pdf
[2] dostępne pod adresem https://github.com/thyrgle/191_Final_Project/blob/master/paper.pdf
[3] Źródło: blog Johna Baeza https://golem.ph.utexas.edu/category/2015/05/the_origin_of_the_word_quandle.html

Drugi aksjomat nazywa się czasem odwracalnością z prawej strony: znając $x \triangleright y$ oraz y możemy odtworzyć element x, jednak znając x być może nie jesteśmy w stanie odtworzyć elementu y. Jedyny element x taki, że $x \triangleright y = z$ nazwijmy $y \triangleleft z$. To pozwala podać trochę inną definicję kwandli, którą przytaczamy jako ciekawostkę.

Definicja 4.5.2 Zbiór X z dwuargumentowymi działaniami $\triangleright, \triangleleft$ taki, że dla wszystkich $x, y, z \in X$ zachodzi:

$$x \triangleleft x = x \tag{4.8}$$
$$x \triangleright x = x \tag{4.9}$$
$$(x \triangleleft y) \triangleright x = y \tag{4.10}$$
$$x \triangleleft (y \triangleright x) = y \tag{4.11}$$
$$(x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright z \tag{4.12}$$
$$(x \triangleleft y) \triangleleft (x \triangleleft z) = x \triangleleft (y \triangleleft z) \tag{4.13}$$

nazywamy kwandlem.

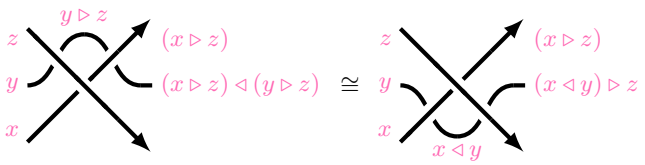
Pokażemy teraz, czemu aksjomaty kwandli można traktować jako przetłumaczenie ruchów Reidemeistera na język algebry.

Fakt 4.5.3 — niezmiennik zliczający. Niech X będzie skończonym kwandlem. Liczba etykietowań diagramu elementami kwandla X jest niezmiennikiem węzłów, zwanym niezmiennikiem zliczającym.

Dowód. Musimy pokazać, że etykiety na diagramiem przed każdym ruchem Reidemeistera wyznaczają jednoznacznie układ etykiet po tym ruchu. Pierwszy i drugi ruch:



Trzeci ruch:



Jak widać, przy trzecim ruchu coś poszło nie tak, ale to się zateguje później. ■

Wiele znanych struktur algebraicznych okazuje się być źródłem kwandli:

■ **Przykład 4.5.4 — kwandel cykliczny/diedralny.** Grupa abelowa z działaniem $x \triangleright y = 2y - x$. (Nazwa diedralny bierze się stąd, że zbiór odbić w grupie diedralnej stanowi przykład takiego kwandla). (Lepiej nie pytać, skąd wziął się przymiotnik cykliczny). ■

■ **Przykład 4.5.5 — kwandle sprzężone.** Grupa G z działaniem $x \triangleright y = y^{-n} x y^n$ dla każdej naturalnej wartości n. ■

■ **Przykład 4.5.6 — kwandel Alexandera.** Moduł M nad pierścieniem $\mathbb{Z}[t, 1/t]$ wielomianów Laurenta z działaniem $x \triangleright y = tx + (1-t)y$. ■

Dionísio, Lopes [117, s. 1043] potrzebują skończonych kwandli Alexandera, mają postać $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[t, 1/t]/h(t)$, gdzie h jest pewnym unormowanym wielomianem.

■ **Przykład 4.5.7 — kwandel symplektyczny.** Przestrzeń liniowa i antysymetryczna forma dwuliniowa $\langle \bullet | \bullet \rangle$ z działaniem $x \triangleright y = x + \langle x|y\rangle \cdot y$. ■

Żeby opowiedzieć, jak wyglądały poszukiwania małych kwandli, musimy wprowadzić dwie definicje. (Potem można o nich zapomnieć).

Definicja 4.5.8 — homomorfizm kwandli. Niech Q_1, Q_2 będą kwandlami. Odwzorowanie $f\colon Q_1 \to Q_2$ spełniające warunek

$$\forall x, y \in Q_1 : f(x \triangleright y) = f(x) \triangleright f(y), \tag{4.14}$$

nazywamy homomorfizmem kwandli.

Definicja 4.5.9 — kwandel spójny. Niech Q będzie kwandlem, zaś G podgrupą wszystkich automorfizmów Q generowaną przez automorfizmy wewnętrzne $\beta_y(x) = x \triangleright y$. Jeżeli działanie podgrupy G na Q jest przechodnie, kwandel Q nazywamy spójnym.

Dionísio, Lopes [117] znaleźli 10 kwandli Alexandera, które odróżniają prawie każde dwa spośród 249 węzłów pierwszych do 10 skrzyżowań; rozstrzygnięcia brak dla 962 z 30876 par. Po upływie prawie dekady Vendramin [454] wytropił wszystkie 431 kwandli spójnych rzędu 35 lub mniejszego. Clark, Elhamdadi, Saito oraz Yeatman [90] pokazali niedawno zbiór 26 kwandli, które razem odróżniają od siebie wszystkie 2977 zorientowanych węzłów pierwszych o co najwyżej 12 skrzyżowaniach. Największy z nich jest rzędu 182.

Joyce w swojej rozprawie doktorskiej przypisał każdemu węzłowi K pewien szczególny kwandel $Q(K)$, kwandel podstawowy. Jest to niezmiennik generowany przez łuki diagramu związany relacjami pochodzącymi ze skrzyżowań, tak jak w definicji grupy węzła. Wprawdzie znajomość kwandla $Q(K)$ pozwala odtworzyć węzeł K z dokładnością do jego orientacji, ale jak nietrudno się domyślić, ceną za to jest trudność w jego wyznaczaniu.

Na przykład Niebrzydowski, Przytycki [342] pokazali, że

■ **Przykład 4.5.10** Kwandel podstawowy trójlistnika jest izomorficzny z pewnym rzutowym pierwotnym podkwandlem[4] odwzorowań liniowych przestrzeni symplektycznej $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ■

Słabszym, choć prostszym (?) w znalezieniu niezmiennikiem jest liczba homomorfizmów z kwandla danego węzła w pewien wybrany wcześniej kwandel Q.

4.5.2 Półki, wraki i wrzeciona

Aksjomaty grupy można wzmacniać (grupy abelowe) lub osłabiać (monoidy). Podobnie czyni się z aksjomatami kwandli. Kwandle inwolutywne odpowiadają węzłom bez orientacji, wraki dobrze opisują węzły obramowane, i tak dalej.

Definicja 4.5.11 — kwandel inwolutywny. Kwandel Q, w którym dla wszystkich $x, y \in Q$ zachodzi $x \triangleleft (x \triangleleft y) = y$, nazywamy inwolutywnym albo kei.

[4] Cokolwiek to znaczy!

Kwandle inwolutywne badał jako pierwszy Takasaki (1943). Szukał niełącznej struktury, która dobrze opisywałaby odbicia w skończonej geometrii.

Definicja 4.5.12 — półka. Zbiór X wyposażony w dwuargumentowe działanie $\triangleright$ taki, że dla wszystkich elementów $x, y, z \in X$ zachodzi $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$, nazywamy półką.

■ **Przykład 4.5.13** Niech B_∞ oznacza kogranicę łańcucha $B_0 \to B_1 \to B_2 \to \ldots$, gdzie inkluzja $B_n \to B_{n+1}$ zadana jest przez dołączenie niesplątanego z resztą diagramu pasma, zaś ϕ będzie jej endomorfizmem posyłającym generator σ_k na σ_{k+1}. Zbiór B_∞ z działaniem $a \triangleleft b = a\phi(b)\sigma_1\phi(a)^{-1}$ jest półką.[5] ■

To nieprzetłumaczalna gra słów: dwie półki (*shelves*), lewa i prawa, które dobrze do siebie pasują, dają stojak (*rack*, czyli dla nas wrak). Jak napisała Crans [99, s. 86]: *„Just as a rack is comprised of two shelves which fit together nicely, a quandle is made up of two spindles"*.

Półka stanowi uogólnienie dwóch obiektów – wrzecion i wraków.

Definicja 4.5.14 — wrzeciono. Zbiór X z dwuargumentowym działaniem $\triangleright$ taki, że dla wszystkich elementów $x, y, z \in X$ zachodzi:

1. $x \triangleright x = x$,
2. $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$

nazywamy wrzecionem.

Definicja 4.5.15 — wrak. Zbiór X z dwuargumentowym działaniem $\triangleright$ takim, że dla każdej trójki elementów $x, y, z \in X$ zachodzi:

1. odwzorowanie $\beta_y \colon X \to X$ dane wzorem $\beta_y(x) = x \triangleright y$ jest odwracalne,
2. $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$

nazywamy wrakiem.

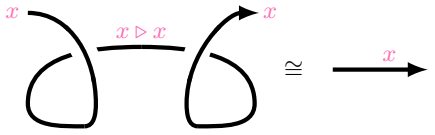
■ **Przykład 4.5.16** Zbiór $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ z działaniem $x \triangleright y = \sigma(x)$, gdzie $\sigma \in S_n$ jest dowolną permutacją. ■

■ **Przykład 4.5.17** Moduł nad pierścieniem

$$\frac{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, s]}{(s^2 - (1-t)s)} \tag{4.15}$$

z działaniem $x \triangleright y = tx + sy$. ■

Wraki są naturalnym niezmiennikiem węzłów obramowanych, bo dobrze współgrają z II, III oraz podwójnym I ruchem Reidemeistera, który to nie zmienia spinu diagramu:



[5] Źródło: encyklopedia nLab https://ncatlab.org/nlab/show/shelf. Uwaga: symbole $\triangleleft$, $\triangleright$ są tam zamienione znaczeniami!

5. Niezmienniki wielomianowe

Wszystkie poznane dotąd niezmienniki (poza długością sznurową) przyjmowały całkowite wartości. Teraz poszerzymy skrzynkę z narzędziami o klasyczne wielomiany Alexandera, Jonesa, HOMFLY; ale też późniejsze: BLM/Ho, Kauffmana oraz niezmienniki skończonego typu. Co ciekawe, wielomiany te wywodzą się z różnych działów matematyki: wielomian Δ Alexandera z homologii pewnej przestrzeni nakrywającej, V Jonesa: z algebr von Neumanna. HOMFLY (albo raczej HOMFLY-PT) to ich naturalne uogólnienie.

Atrakcyjnym wprowadzeniem była przygotowana przez matematyków niemieckich (przez to dostępna tylko w ich języku) praca [154]. Potem okazało się, że praca została wycieknięta do internetu bez ich wiedzy, a następnie skasowana. A to heca! Pierwotnymi artykułami były [12], [203] oraz [146], wszystkie należą do przełomowych w kombinatorycznej teorii węzłów.

5.1 Wielomian Alexandera

Wielomian Alexandera to najstarszy niezmiennik tego typu, odkryty w 1923 roku [11]. Jego pierwsza definicja była czysto topologiczna algebraicznie:

Definicja 5.1.1 Niech K będzie węzłem w 3-sferze S^3, zaś X nieskończonym nakryciem cyklicznym jego dopełnienia otrzymanym przez rozcięcie dopełnienia wzdłuż powierzchni Seiferta. Na przestrzeni X oraz grupie homologii $H_1(X)$, działa automorfizm t, który czyni z niej moduł nad pierścieniem $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, i to skończenie prezentowalny. Załóżmy, że wiemy mniej niż mało; w szczególności nie wiemy, czy nasz moduł posiada przedstawienie z r generatorami i s relacjami, gdzie $r \leqslant s$ (jeśli tak jest, rozpatrzmy ideał generowany przez minory $r \times r$ macierzy prezentacji; jeśli nie, weźmy ideał zerowy). Alexander pokazał, że ideał, o którym mowa, jest zawsze niezerowy, główny i generowany przez coś, co teraz nazywamy wielomianem Alexandera.

Nie jest to definicja, z którą praca stanowi przyjemność. Dlatego podamy prostszy opis, oparty o równania kolorujące. Później sprawdzimy, jaki wpływ na wielomian mają suma spójna, lustro i rewers oraz jak Conway odkrył na nowo wielomian Alexandera, jednocześnie przyspieszając jego liczenie. Na koniec pokażemy, co łączy go ze zdefiniowanymi wcześniej i później numerycznymi niezmiennikami.

5.1.1 Równania kolorujące (definicja pierwsza)

Definicja 5.1.2 Niech D będzie diagramem zorientowanego splotu L, którego wszystkim łukom przypisano kolory $0, 1, \ldots, n-1$. Wtedy do każdego skrzyżowania:



można przypisać wielomianowe równanie kolorujące $g+tk-tg-h=0$. Tylko orientacja górnego łuku ma znaczenie.

Nie jest trudno zgadnąć, skąd bierze się nazwa „równanie kolorujące": podstawiając tutaj $t=-1$ otrzymujemy szczególną definicję 4.1.3.

Definicja 5.1.3 — wielomian Alexandera. Niech L będzie splotem, zaś D takim jego diagramem, na którym nie widać żadnych krzywych zamkniętych (literalnie niewęzła ◯). Niech $x_0, \ldots, x_m$ będą pewnymi symbolami przypisanymi do włókien (a symbole $0, \ldots, m$ do skrzyżowań) diagramu D. Oznaczmy przez $p_{i,j}$ współczynnik przy włóknie x_j w wielomianowym równaniu kolorującym nad wierzchołkiem i. Z macierzy $P=(p_{i,j})$ wykreślmy po jednej kolumnie i wierszu. Wyznacznik zmniejszonej macierzy to wielomian Alexandera, oznaczamy go $\Delta_L(t)$.

Nasz nowy niezmiennik nie jest zwykłym wielomianem, tylko wielomianem Laurenta jednej zmiennej, czyli elementem pierścienia $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$.

Fakt 5.1.4 Wielomian Alexandera z dokładnością do mnożenia przez jedności:

$$f(t)\equiv g(t) \iff \exists m\in\mathbb{Z} : f(t)=\pm t^m g(t) \tag{5.1}$$

jest niezmiennikiem zorientowanych splotów.

W dowodzie niezmienniczości wyznacznika węzła skorzystalibyśmy z relacji między nim a grupą kolorującą. Poprzednie wydania książki zawierały sugestię, że elementarny (czyli taki, który nie korzysta z teorii modułów) dowód niezmienniczości wielomianu Alexandera nie istnieje. Sugestia ta była błędna.

Podany dowód dotyczy tylko splotów o spójnym diagramie. Jeżeli mamy diagram, który nie spełnia tego założenia, to fakt 5.1.12 orzeka, że jego wielomian Alexandera znika.

Dowód. Ustalmy diagram o k skrzyżowaniach, który rozcina płaszczyznę na $k+2$ obszarów i utwórzmy macierz o wymiarach $k\times k$, której kolumny odpowiadają obszarom, wiersze zaś skrzyżowaniom – pomijając przy tym dwa sąsiadujące ze sobą obszary – o wyrazach ze współczynników równań kolorujących. Jej wyznacznik jest wielomianem Alexandera.

Sąsiadującym ze sobą obszarom przypiszmy kolejne liczby całkowite tak, by obszar leżący po prawej stronie włókna miał niższy indeks. Pokażemy najpierw, że skasowanie kolumny indeksu n oraz $n+1$ sprawia, że wyznacznik zmienia się co najwyżej o czynnik $\pm t^m$ dla pewnego m. Niech S_n oznacza sumę kolumn indeksu n. Każdy wiersz macierzy zawiera cztery niezerowe wyrazy: $\pm 1, \pm t$, zatem $\sum_n S_n = 0$. Równość ta zachodzi nawet po przemnożeniu kolumny indeksu n przez t^{-n}: $\sum_n t^{-n} S_n = 0$, co prowadzi do relacji $\sum_n (t^{-n}-1)S_n = 0$.

Jeśli więc indeks kolumny v_j wynosi n, to $(t^{-n}-1)v_j$ jest kombinacją liniową innych kolumn niezerowego indeksu (ponieważ $t^0-1=0$).

Rozpatrzmy macierze $M_{0,j}$, $M_{0,k}$, gdzie indeksy j-tej i k-tej kolumny to odpowiednio p i q. Z powyższych rozważań wynika, że $(t^{-q}-1)\Delta_{0,j} = \pm(t^{-p}-1)\Delta_{0,k}$, ale indeksy obszarów są wyznaczone z dokładnością do stałej addytywnej. Biorąc i-tą oraz l-tą kolumnę, indeksów r oraz s, dostaniemy zależności

$$(t^{r-q}-1)\Delta_{l,j} = \pm(t^{r-p}-1)\Delta_{l,i} \tag{5.2}$$

$$(t^{q-s}-1)\Delta_{k,l} = \pm(t^{q-r}-1)\Delta_{k,i} \tag{5.3}$$

co prowadzi do

$$\Delta_{l,j} = \pm\frac{t^{q-r}(t^{r-p}-1)}{t^{q-s}-1}\Delta_{k,i} \tag{5.4}$$

Położenie $p=r+1$, $s=q+1$ pokazuje, że różny wybór kolumn do skreślenia zmienia wyznacznik macierzy co najwyżej o czynnik $\pm t^m$.

Wprowadźmy jeszcze jedną techniczną definicję. Dwie kwadratowe macierze będą dla nas równoważne, jeśli można przejść od jednej do drugiej przy użyciu pięciu operacji:

1. przemnożenie wiersza lub kolumny przez -1;
2. zamiana dwóch wierszy lub kolumn miejscami;
3. dodanie jednego wiersza do innego (lub kolumny do innej);
4. przemnożenie lub podzielenie kolumny przez t;
5. rozszerzenie lub zmniejszenie macierzy o 1 na przekątnej i zera w innych miejscach.

Ruchy Reidemeistera prowadzą do macierzy równoważnych wyjściowym. Każda z tych operacji zmienia wyznacznik macierzy o czynnik $\pm t^{-m}$, co kończy dowód. ■

Zwyczajowo wielomian normalizuje się: bierze reprezentanta, który jest symetryczny w zmiennych t i t^{-1} oraz przyjmuje w punkcie 1 wartość $\Delta_L(1)=1$. Odwrotnie, dowolny wielomian Laurenta z całkowitymi współczynnikami o takich własnościach jest wielomianem Alexandera pewnego węzła:

Fakt 5.1.5 Niech $p(t)$ będzie wielomianem Laurenta nad $\mathbb{Z}$ takim, że $p(t)=p(t^{-1})$ oraz $p(1)=\pm 1$. Wtedy istnieje węzeł K, dla którego $\Delta_K(t)\equiv p(t)$.

Niedowód. Hosokawa [190] udowodnił to dla pomocniczego wielomianu splotów

$$\frac{\Delta(t,\ldots,t)}{(1-t)^{\max(0,\mu-2)}}, \tag{5.5}$$

gdzie μ oznacza liczbę ogniw. Książka Rolfsena [385, s. 171-172] zawiera natomiast jawną konstrukcję węzła o danym wielomianie Alexandera. ■

O wielomianie Hosokawy wspominają Burde, Zieschang [64, s. 151, 183].

■ **Przykład 5.1.6** Wielomian Alexandera nie wykrywa niewęzła: $\Delta(11_{471})=1$. ■

Wszystkie przykłady węzłów pierwszych do 12 skrzyżowań o trywialnym wielomianie Alexandera to $11_{471} = 11n_{34}$, $11_{473} = 11n_{42}$, $12n_{313}$, $12n_{430}$. Dzięki pracy Sakumy [393] dowiedzieliśmy się, że Seifert [406], Whitehead [466], Kinoshita oraz Terasaka [225] pokazali, jak znaleźć więcej węzłów o trywialnym wielomianie Alexandera. W tej książce mamy już jedno źródło całej serii przykładów: fakt 7.3.10.

5.1.2 Wielomian Alexandera a operacje na węzłach

Wielomian Alexandera nie odróżnia luster mL i rewersów rL od wyjściowych splotów L:

Fakt 5.1.7 Niech L będzie zorientowanym splotem. Wtedy $\Delta_{mL}(t) = \Delta_L(1/t)$.

Dowód. Po odbiciu diagramu względem pionowej prostej skrzyżowanie z definicji 4.1.3 też się odbija. Równanie związane z nim zmienia się według schematu:

$$a + tc - ta - b = 0 \rightleftharpoons a + tb - ta - c = 0 \tag{5.6}$$

Pierwsze równanie z t zamienionym na $1/t$ staje się drugim równaniem przemnożonym przez $-1/t$, zatem $\Delta_{mL}(t) = \Delta_L(1/t)$. ■

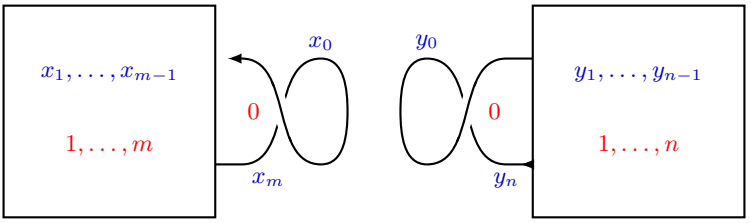
Fakt 5.1.8 Niech L będzie zorientowanym splotem. Wtedy $\Delta_{rL}(t) = \Delta_L(1/t)$.

Niedowód. Analogicznie. ■

Fakt 5.1.9 Niech K_1, K_2 będą zorientowanymi węzłami. Wtedy

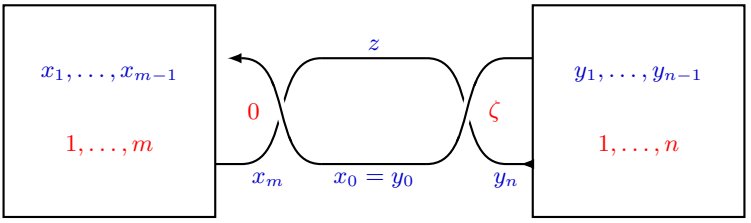
$$\Delta_{K_1 \# K_2}(t) \equiv \Delta_{K_1}(t)\Delta_{K_2}(t). \tag{5.7}$$

Dowód. Wybierzmy poniższe diagramy dla węzłów K_1 oraz K_2:



Niech M_1 oraz M_2 oznaczają macierze otrzymane z wielomianowych równań kolorujących dla K_1 oraz K_2 przez skreślenie pierwszej kolumny i pierwszego wiersza. Wtedy $\Delta_{K_1}(t) = \det M_1$ oraz $\Delta_{K_2}(t) = \det M_2$.

Poniższy diagram przedstawia sumę $K_1 \# K_2$:



Ponumerujemy teraz łuki i skrzyżowania na nowo tak, by znalezienie wyznacznika nie wymagało dużo liczenia. Przyjmijmy kolejność dla łuków sumy od $x_0, x_1, \ldots, x_m$ przez $y_1, \ldots, y_n$ do z; zaś skrzyżowania ustawmy od $0, 1, \ldots, m$ (pochodzące od K_1) przez $1, \ldots, n$ (pochodzące od K_2) do ζ. Wielomianowe równanie kolorujące dla $K_1 \# K_2$ nad wszystkimi skrzyżowaniami poza ostatnim są takie same, jak ich odpowiedniki przed dodaniem do siebie węzłów. (Jeżeli to stwierdzenie jest nieoczywiste, warto wykonać rysunek dla $K_1 = K_2 = 3_1$ i przeprowadzić stosowne rachunki). Natomiast nad skrzyżowaniem ζ stosowne równanie grzmi $(1-t)x_0 + tz - y_n = 0$.

Z otrzymanej dużej macierzy skreślmy ponownie pierwszą kolumnę oraz pierwszy wiersz. Aby zakończyć dowód, musimy obliczyć jej wyznacznik. Mamy:

$$\Delta_{K_1 \# K_2}(t) = \det \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & -1 & t \end{pmatrix} = \pm t \Delta_{K_1}(t) \Delta_{K_2}(t),$$

gdzie ostatnia równość wynika z rozwinięcia Laplace'a wyznacznika względem ostatniej kolumny. ■

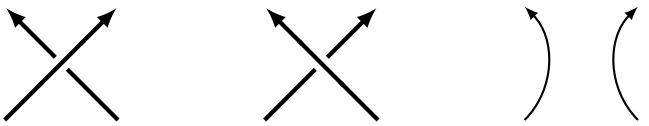
Można zadać sobie pytanie, czy z równości $\Delta_{K_1}(t) = \Delta_{K_2}(t)\Delta_{K_3}(t)$ wynika, że K_1 jest sumą $K_2 \# K_3$ albo chociaż czy K_1 jest złożony. Odpowiedź będzie negatywna, jak pokazuje przykład:

$$\begin{aligned} \Delta_{8_{17}}(t) &= 3(t^2 + t^{-2}) - 8(t + t^{-1}) + 11 && (5.8) \\ &= (t + t^{-1} + 1)(3(t + t^{-1}) - 5) && (5.9) \\ &= \Delta_{3_1}(t)\Delta_{7_2}(t), && (5.10) \end{aligned}$$

ponieważ wszystkie występujące w niej węzły są pierwsze.

5.1.3 Relacja kłębiasta (definicja druga)

Definicja 5.1.10 — relacja kłębiasta. Niech L będzie zorientowanym splotem z ustalonym diagramem oraz skrzyżowaniem. Oznaczmy przez L_+, L_-, L_0 trzy diagramy splotów, które różnią się jedynie na małym obszarze wokół ustalonego skrzyżowania:

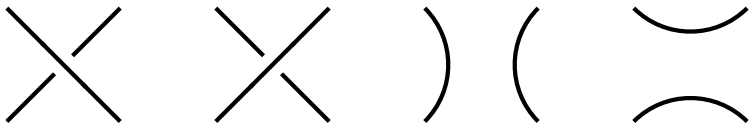


(a) L_+ (b) L_- (c) L_0

Gdy wartości niezmiennika (zazwyczaj zorientowanych) splotów f: $f(L_+), f(L_-), f(L_0)$ są związane jakimś wielomianowym równaniem, którego współczynniki nie zależą od wyboru splotu L, to mówimy, że niezmiennik f spełnia relację kłębiastą.

Termin „skein" (kłąb) wprowadził Conway około roku 1970, kontynuując tradycję używania słów, które kojarzą się ze sznurkami. Po polsku powinniśmy mówić o relacji motkowej, tak jak zaproponował dawno temu Przytycki [367, s. 172], ale my nie przepadamy za tym terminem (i nie potrafimy powiedzieć, dlaczego). Jednocześnie nie znamy się na robieniu na drutach, więc może nie popełniamy zbrodni mówiąc o kłębach zamiast o motkach. *Paula don't kill me pls.*

Kiedy pracuje się z niezorientowanymi węzłami, używa się innego (!) zestawu oznaczeń:



(a) L_+ (b) L_- (c) L_0 (d) L_∞

■ **Przykład 5.1.11** Wielomian Alexandera każdego węzła jest wyznaczony jednoznacznie przez relację kłębiastą

$$\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) - (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta_{L_0}(t) = 0 \tag{5.11}$$

z warunkiem brzegowym $\Delta_{\bigcirc}(t) = 1$. ■

Wzór ten, choć znany był Alexanderowi, nie zyskał przez wiele dekad uwagi matematyków. Mogło tak być, gdyż w pracy [12] znalazł się on na samym końcu, pod nagłówkiem „twierdzenia różne". Na nowo odkrył go Conway: chcąc szybko liczyć wielomian Alexandera zaproponował, by reparametryzować go wzorem $\Delta(x^2) = \nabla(x - 1/x)$; z tego względu funkcję ∇ nazywa się czasem potencjałem Conwaya (robią tak Burde, Zieschang [64, s. 152]). Spełnia wtedy zależność

$$\nabla_{L_+}(x) - \nabla_{L_-}(x) = x\nabla_{L_0}(x). \tag{5.12}$$

Relacja kłębiasta wystarcza do wyznaczenia Δ_L każdego splotu na mocy lematu 3.2.2.

Fakt 5.1.12 Niech L będzie splotem rozszczepialnym. Wtedy $\Delta_L(t) \equiv 0$.

Burde, Zieschang [64, s. 150] wyprowadzają to z prezentacji Wirtingera.

Dowód. Skorzystamy z relacji kłębiastej. Niech L_0 będzie splotem rozszczepialnym z dwoma ogniwami. Wtedy węzły L_+ oraz L_- powstałe przez dodanie skrzyżowania między ogniwami są tego samego typu, zatem

$$\Delta_{L_0} = \frac{\Delta_{L_+} - \Delta_{L_-}}{t^{1/2} - t^{-1/2}} = 0, \tag{5.13}$$

a to chcieliśmy udowodnić. ■

Implikacja w drugą stronę jest fałszywa. Niech $\sigma_* = \sigma_2\sigma_3^{-2}\sigma_2$. Domknięcie warkocza $\sigma_1\sigma_*\sigma_1\sigma_3\sigma_*\sigma_1\sigma_3\sigma_*\sigma_3$ nie jest rozszczepialne, ale jego wielomian Alexandera jest zerem. Warkocze poznamy w rozdziale piątym.

Wniosek 5.1.13 Wielomian Alexandera nie odróżnia od siebie niesplotów.

Wady tej nie posiada wielomian Jonesa.

5.1.4 Wielomian Alexandera a niezmienniki numeryczne

Fakt 5.1.14 Niech L będzie zorientowanym splotem. Wtedy $|\Delta_L(-1)| = \det L$.

Dowód. Wystarczy porównać definicję dla Δ_L (5.1.3) oraz $\det L$ (4.3.2). ■

Fakt 5.1.15 Niech K będzie węzłem. Wtedy wielomian Alexandera zadaje ograniczenie dolne na jego indeks skrzyżowaniowy:

$$\operatorname{span} \Delta_K(t) < \operatorname{cr} K. \tag{5.14}$$

Być może istnieje bezpośredni dowód tej nierówności, ale jedyne uzasadnienie, jakie znamy, opiera się na fakcie 6.2.20 oraz wniosku 6.2.24 – czyli własnościach genusu.

Fakt 5.1.16 Tylko skończenie wiele węzłów alternujących może mieć ten sam wielomian Alexandera.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje nieskończony ciąg K_n węzłów alternujących o tym samym wielomianie Alexandera $\Delta_K(t)$. Wszystkie jego wyrazy mają ten sam wyznacznik, ponieważ $\det K_n = |\Delta_K(-1)|$. Z faktu 4.3.3 wynika, że indeks skrzyżowaniowy węzłów K_n jest wspólnie ograniczony: $c_k \leqslant \det K_n = \det K$. To prowadzi do sprzeczności: węzłów o danym indeksie skrzyżowaniowym jest tylko skończenie wiele. ■

Wielomian Alexandera nie nakłada żadnych ograniczeń na liczbę gordyjską, wspominamy o tym w dowodzie faktu 6.2.54. Mamy też:

Fakt 5.1.17 Nie istnieje związek między liczbą mostową oraz stopniem wielomianu Alexandera.

Wiemy o tym z książki Livingstona [274, s. 145].

Dowód. Niech K będzie nietrywialnym węzłem o trywialnym wielomiane Alexandera, na przykład 11_{471}. (Wiemy o istnieniu takiego węzła z faktu 5.1.6). Wtedy suma spójna n kopii węzła K, $K \# K \# \ldots \# K$, też ma trywialny wielomian Alexandera, ale jej liczba mostowa wynosi $2n + 1$.

Niech K_n będzie węzłem $(2, n)$-torusowym. Wtedy $\deg(\Delta(K_n)) = n - 1$ (to jest treść wniosku 7.5.21), ale węzeł K_n jest dwumostowy. ■

5.1.5 Pochodna Foxa

Pojęcie grupy węzła oraz jej prezentacji wprowadzamy później, więc warto wrócić tutaj dopiero przy drugim lub następnym czytaniu! Są dwa konkurencyjne podejścia do prezentowania grupy węzła. Zgodnie z pomysłem pochodzącym jeszcze od Dehna, można przypisywać różne litery czterem częściom płaszczyzny, które są wycinane przez łuki skrzyżowania. Między

innymi pierwsza praca Alexandera była bliska takiemu postępowaniu, ale dla oszczędności miejsca, nie opiszemy go wcale.

Alternatywne rozwiązanie każe etykietować nie obszary płaszczyzny, tylko łuki diagramu. Klasyczne podręczniki teorii węzłów, takie jak [104] Crowella, macierz, a co za tym idzie, także wielomian Alexandera wprowadzają właśnie w ten sposób: przy użyciu prezentacji Wirtingera i pochodnej Foxa. Jak sugeruje tytuł podsekcji, opiszemy teraz ten sposób.

Fox opublikował w Annals of Mathematics cykl pięciu artykułów [136], [137], [138], [79], [139] poświęconych wolnemu rachunkowi różniczkowemu. Definicja 5.1.18 jest tylko małym wycinkiem tego cyklu.

Definicja 5.1.18 — pochodna Foxa. Niech G będzie wolną grupą generowaną przez (być może nieskończony) podzbiór $\{g_i\}_{i\in I}$. Odwzorowanie $\partial/\partial g_i \colon G \to \mathbb{Z}G$ spełniające trzy aksjomaty:

$$\frac{\partial}{\partial g_i}(e) = 0 \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial g_i}(g_j) = \delta_{ij} \tag{5.16}$$

$$\forall u, v \in G : \frac{\partial}{\partial g_i}(uv) = \frac{\partial}{\partial g_i}(u) + u\frac{\partial}{\partial g_i}(v), \tag{5.17}$$

gdzie δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera, nazywamy pochodną cząstkową Foxa.

Ustalmy grupę G oraz jej prezentację $\langle X|R\rangle = F/N$, gdzie $F = \langle X\rangle$ jest wolną grupą, zaś N to domknięcie normalne relacji R. Mamy wtedy kanoniczny rzut $\varphi \colon F \to G$. Niech $G^{ab} = G/[G,G]$ oznacza abelianizację, wtedy funkcja $\varphi^{ab} \colon F \to G^{ab}$ jest dobrze określona. Ponieważ nie prowadzi to do zamieszania, tych samych liter będziemy używać także do funkcji $\varphi \colon \mathbb{Z}F \to \mathbb{Z}G$. Definiujemy teraz macierz Jacobiego wymiaru $n \times n$:

$$J = \left(\varphi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\right). \tag{5.18}$$

oraz macierz J^{ab}, która jest obrazem J nad $\mathbb{Z}G^{ab}$. W pierścieniu $\mathbb{Z}G^{ab}$ wyróżnia się ideały generowane przez minory (wyznaczniki podmacierzy) rozmiaru $i \times i$ w J^{ab}. Ciąg $D_1, D_2, \ldots$ tych ideałów jest z dokładnością do jakichś technicznych szczegółów niezmiennikiem, to znaczy nie zależy od prezentacji.

W szczególnym przypadku, kiedy G jest grupą węzła, relacje r_i pochodzą z prezentacji Wirtingera, zaś grupa G^{ab} jest nieskończona, cykliczna. Niech t oznacza jej generator; wtedy najwyższy niezerowy ideał D_i jest główny. Generator tego ideału nazywamy wielomianem Alexandera.

Rachunki są trochę prostsze niż wydają się być. Wystarczy najpierw wykreślić z macierzy J jedną kolumnę oraz jeden wiersz, po czym podstawić za wszystkie litery zmienną t i policzyć wyznacznik. Otrzymaliśmy znowu wielomian Alexandera!

Wolnemu rachunkowi różniczkowemu poświęcony jest rozdział 9 książki Burdego, Zieschange'a [64, s. 140-160].

5.1.6 Różniaste różności

Warunki Torresa Istnieje odmiana wielomianu Alexandera, która liczy sobie tyle zmiennych, ile ogniw posiada splot (nie opisywaliśmy jej i nie zamierzamy). Klasyfikację 5.1.5 można

częściowo uogólnić: Torres [439] znalazł dwie geometryczne własności, nazwane później warunkami Torresa. Są warunkami koniecznymi, ale nie wystarczającymi, jak odkrył ponad ćwierć wieku później Hillman [185]: wielomian

$$D(x,y) = \frac{(1-x^6y^6)(x-1+1/x) - 2(1-x^5y^5)(1-x)(1-y)}{1-xy} \tag{5.19}$$

spełnia warunki Torresa, ale nie jest wielomianem Alexandera żadnego splotu. Wspominają o tym krótko Burde, Zieschang [64, s. 150].

Unimodalne współczynniki Fox [140] podejrzewał, że ciąg współczynników wielomianu Alexandera węzła alternującego jest unimodalny. Dowód podano dla węzłów algebraicznych (Murasugi [324]) oraz genusu dwa (Ozsváth i Szabó [349]). Hipoteza w ogólnym przypadku pozostaje otwarta. Wiemy natomiast, że kolejne współczynniki wielomianu Conwaya węzła alternującego są przeciwnych znaków i niezerowe (Murasugi [328, s. 242] odsyła do swojej wcześniejszej pracy [318], gdzie używa archaicznej nomenklatury: SCHLAUCHKNOTEN zamiast węzłów satelitarnych jak w [400, s. 245]). Wynika stąd, że węzły (p,q)-torusowe dla $p > q > 2$ oraz pierwsze węzły satelitarne nie są alternujące.

5.2 Wielomian Jonesa

Drugi wielomianowy niezmiennik, jaki poznamy, spełnia bardzo podobną relację kłębiastą (porównaj: 5.11 versus 5.45), co ten z poprzedniej sekcji. Zaczniemy od bardzo ogólnikowego opisu algebry Temperleya-Lieba i śladu Markowa; dwóch składników w konstrukcji Jonesa. Szczegółowo zajmiemy się późniejszym odkryciem Kauffmana, bo wykorzystał lubiane przez nas diagramy i ruchy Reidemeistera. Opiszemy krótko, jak zmienia się wielomian podczas odbijania, odwracania i dodawania. Na koniec podamy dowód I hipotezy Taita, wspomnimy też, jaką rolę wielomian Jonesa odegrał w dowodzie pozostałych dwóch hipotez.

5.2.1 Algebra Temperleya-Lieba i ślad Markowa

Jones otrzymał swój wielomian jako efekt uboczny badań nad algebrami operatorów: wziął „ślad" pewnej reprezentacji warkoczy w algebrę, która miała ważne znaczenie w mechanice statystycznej. Jego praca [203] jest bardzo zwięzła, nam oświecenie przyniosła dopiero książka Kauffmana [214, s. 85-103] oraz strona „Aharonov–Jones–Landau algorithm" z angielskiej Wikipedii. Dziękujemy jej kilkunastu autorom.

Definicja 5.2.1 — algebra Temperleya-Lieba. Niech R będzie przemiennym pierścieniem, w którym ustalono element $\delta \in R$. Wtedy R-algebrę $TL_n(\delta)$ generowaną przez elementy $e_1, \ldots, e_{n-1}$, które związane są relacjami

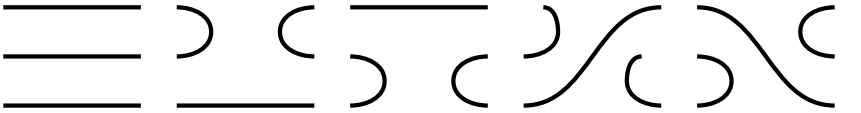
$$U_i^2 = \delta U_i, \tag{5.20}$$

$$U_i U_{i\pm1} U_i = U_i, \tag{5.21}$$

$$U_i U_j = U_j U_i \tag{5.22}$$

dla $|i-j| \geqslant 2$, nazywamy algebrą Temperleya-Lieba.

$TL_n(\tau)$ daje się przedstawić przy użyciu diagramów: prostokątów, których przeciwległe boki zawierają po n punktów połączonych w pary tak, by uniknąć samoprzecięć. Mnożenie elementów algebry odpowiada sklejaniu dwóch diagramów, przy czym każdą zamkniętą pętlę zamieniamy na dodatkowy czynnik δ. To prawie są warkocze.



(a) 1 (b) U_1 (c) U_2 (d) U_1U_2 (e) U_2U_1

Rysunek 5.3: Diagramatyczne przedstawienie elementów algebry $TL_3(\delta)$

Mamy bojowe zadanie dla Czytelnika: narysować sześć diagramów odpowiadających trzem relacjom z definicji 5.2.1.

Dla ustalonej liczby zespolonej A, niech funkcja $\rho_A\colon B_n \to TL_n(\delta)$ będzie zadana na generatorach grupy warkoczy: $\rho_A(\sigma_i) = AU_i + A^{-1}$. Bezpośredni rachunek pokazuje, że jeśli $\delta = -A^2 - A^{-2}$, to ρ_A jest reprezentacją.

Definicja 5.2.2 — algebra Jonesa. Niech R będzie przemiennym pierścieniem, zaś τ skalarem, który komutuje ze wszystkimi innymi elementami. Wtedy R-algebrę $TL_n(\tau)$ generowaną przez elementy $e_1, \dots, e_{n-1}$, związanymi relacjami

$$e_i^2 = e_i, \tag{5.23}$$

$$e_i e_{i\pm1} e_i = \tau e_i, \tag{5.24}$$

$$e_i e_j = e_j e_i \tag{5.25}$$

dla $|i-j| \geqslant 2$, nazywamy algebrą Jonesa.

Kauffman pisze, że algebry są ze sobą związane: jeśli ustalimy swoją ulubioną algebrę Temperleya-Lieba, a potem położymy $e_i = \delta^{-1}U_i$ oraz $\tau = \delta^{-2}$, to aksjomaty Jonesa są spełnione.

Definicja 5.2.3 — ślad Markowa. Niech K będzie elementem algebry Temperleya-Lieba $TL_n(\delta)$, iloczynem generatorów $e_1, \dots, e_{n-1}$, którego domknięcie rozpada się na m składowych spójności. Wielkość

$$\operatorname{tr} K = \delta^{m-n} \tag{5.26}$$

nazywamy śladem Markowa elementu K.

Ślad Markowa przedłuża się liniowo do całej algebry Temperleya-Lieba i jest prawdziwym śladem: spełnia warunki $\operatorname{tr}(1) = 1$ oraz $\operatorname{tr}(T_1T_2) = \operatorname{tr}(T_2T_1)$. Ma też dodatkową własność, że jeśli w jest słowem na literach $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}$, to $\operatorname{tr}(we_i) = \delta^{-1}\operatorname{tr}(w)$.

Jones skorzystał z twierdzeń Alexandera i Markowa dotyczących warkoczy, złożył ze sobą funkcje tr oraz ρ_A oraz znormalizował wynik. Dostał tak niezmiennik splotów L domknięć warkoczy B:

$$V_L(A^{-4}) = (-A)^{3\operatorname{wr} D}\delta^{n-1}(\operatorname{tr}\circ\rho_A)(B). \tag{5.27}$$

5.2.2 Klamra Kauffmana

Klamra Kauffmana to wielomian Laurenta jednej zmiennej zdefiniowany w pracy [212] z 1987 roku, oparty na ruchach Reidemeistera. Dzięki swojej prostocie mógł być odkryty na początku XX wieku, nim jeszcze maszyneria teorii węzłów została rozwinięta.

Poszukujemy niezmiennika dla splotów o kilku prostych własnościach. Przede wszystkim żądamy, by niewęzłowi przypisany był wielomian 1: $\langle \bigcirc \rangle = 1$. Po drugie chcemy wyznaczać nawiasy znając je dla prostszych splotów, co zapiszemy symbolicznie:

$$\left\langle \times \right\rangle = A \left\langle \;) \; (\; \right\rangle + B \left\langle \cup \right\rangle \tag{5.28}$$

Zależy nam też na tym, by móc dodać do splotu trywialną składową: $\langle L \cup \bigcirc \rangle = C\langle L \rangle$. Prosty rachunek pokazuje wpływ drugiego ruchu Reidemeistera na klamrę:

$$\left\langle \gtrless \right\rangle = (A^2 + ABC + B^2) \left\langle \cup \right\rangle + BA \left\langle \;) \; (\; \right\rangle \stackrel{?}{=} \left\langle \;) \; (\; \right\rangle . \tag{5.29}$$

Aby zachodziła ostatnia równość wystarczy przyjąć $B = A^{-1}$, co wymusza na nas wartość trzeciego parametru: $C = -A^2 - A^{-2}$. W ten sposób odkryliśmy definicję.

Definicja 5.2.4 — klamra Kauffmana. Wielomian Laurenta $\langle D \rangle$ dla diagramu splotu D zmiennej A, który jest niezmienniczy ze względu na gładkie deformacje diagramu, a przy tym spełnia trzy poniższe aksjomaty:

$$\left\langle \bigcirc \right\rangle = 1 \tag{5.30}$$

$$\left\langle \times \right\rangle = A \left\langle \;) \; (\; \right\rangle + A^{-1} \left\langle \cup \right\rangle \tag{5.31}$$

$$\left\langle D \sqcup \bigcirc \right\rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle \tag{5.32}$$

nazywamy klamrą Kauffmana.

Drugi aksjomat jest wariacją na temat relacji kłębiastej.

Lemat 5.2.5. *Klamra Kauffmana każdego diagramu wyznacza się w skończenie wielu krokach.*

Dowód. Najprościej dowieść tego indukcyjnie, ze względu na liczbę skrzyżowań na diagramie splotu. Baza indukcji to przypadek zero skrzyżowań, czyli niesplotów. Zauważmy, że ostatni (i później pierwszy) aksjomat pozwala wyznaczyć wartość klamry Kauffmana dla każdego niesplotu w tylu krokach, ile ogniw ma niesplot.

Pozostał krok indukcyjny. Załóżmy, że wyznaczyliśmy już wartości klamry dla każdego diagramu o n skrzyżowaniach i chcemy ją obliczyć dla kolejnego splotu z diagramem o $n+1$ skrzyżowaniach. Pozwala na to drugi aksjomat, usuwający jedno ze skrzyżowań. ■

Przedstawimy teraz wpływ ruchów Reidemeistera na nasz nowy wielomian.

Lemat 5.2.6. *Drugi i trzeci ruch Reidemeistera nie ma wpływu na klamrę Kauffmana, pierwszy ruch zmienia ją zgodnie z regułą:*

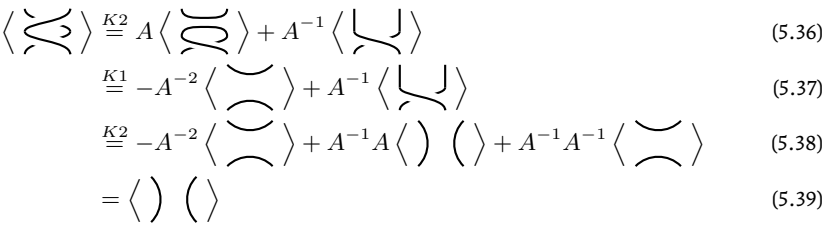
$$\left\langle \right) \left\langle \right\rangle = -A^{-3} \left\langle \; | \; \right\rangle . \tag{5.33}$$

Dowód. Pierwszy ruch Reidemeistera:

$$\left\langle \right) \left\langle \right\rangle \stackrel{K2}{=} A \left\langle \right\rangle + A^{-1} \left\langle \right\rangle \left\langle \right\rangle \tag{5.34}$$

$$\stackrel{K3}{=} A \left\langle \; | \; \right\rangle + A^{-1}(-A^{-2} - A^2) \left\langle \; | \; \right\rangle = -A^{-3} \left\langle \; | \; \right\rangle \tag{5.35}$$

Dla drugiego ruchu:



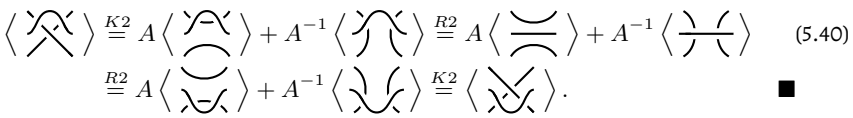
(5.36)

(5.37)

(5.38)

(5.39)

Dla trzeciego ruchu:



(5.40)

■

Wniosek 5.2.7 Rozpiętość klamry Kauffmana jest niezmiennikiem węzłów.

Pierwszy ruch Reidemeistera jest jedynym, co powstrzymuje klamrę Kauffmana przed byciem niezmiennikiem węzłów. Jeżeli przypomnimy sobie, że na mocy lematu 3.3.7 spin nie jest niezmiennikiem z tego samego powodu, odkryjemy „trik Kauffmana": niedoskonałości tych dwóch obiektów znoszą się wzajemnie.

Definicja 5.2.8 Niech L będzie zorientowanym splotem. Wtedy wielomian Laurenta $V(L) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ określony przez

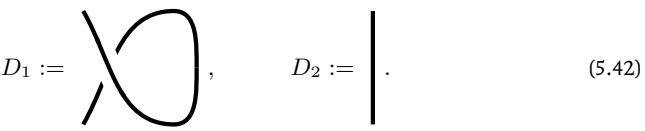
$$V(L) = \left[(-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle\right]_{t^{1/2}=A^{-2}}, \tag{5.41}$$

gdzie D to dowolny diagram dla L, nazywamy wielomianem Jonesa.

Sama klamra odegrała ważną rolę podczas unifikacji wielomianu Jonesa oraz innych niezmienników kwantowych. Korzystając z niej, ruchów i rachunku Kirby'ego (i być może chirurgii Dehna) konstruuje się niezmienniki Reszetichina-Turajewa, czyli coś co nas przerasta i czego nie opiszemy.

Fakt 5.2.9 Wielomian Jonesa jest niezmiennikiem zorientowanych splotów.

Dowód. Pokażemy niezmienniczość wyrażenia $(-A)^{-3w(D)}\langle D\rangle$ na ruchy Reidemeistera. Oznaczmy diagramy przed oraz po wykonaniu pierwszego ruchu Reidemeistera przez



(5.42)

Jak zauważyliśmy już wcześniej, II i III ruch nie zmienia ani spinu, ani klamry Kauffmana. Pozostało sprawdzić I ruch. Mamy:

$$(-A)^{-3w(D_1)} \langle D_1 \rangle = (-A)^{-3w(D_2)+3}(-A)^{-3} \langle D_2 \rangle = (-A)^{-3w(D_2)} \langle D_2 \rangle, \tag{5.43}$$

co kończy dowód. ■

5.2.3 Odróżnianie węzłów i splotów wielomianem Jonesa

Wielomian Jonesa często (chociaż nie zawsze) odróżnia od siebie sploty lepiej niż wielomian Alexandera. Na przykład: wielomian Alexandera wszystkich splotów rozszczepialnych jest taki sam (stwierdzenie 5.1.12), więc nie odróżnia niesplotów wcale. Dla porównania, wielomian Jonesa odróżnia je wszystkie:

Fakt 5.2.10 Wielomianem Jonesa splotu trywialnego o n ogniwach jest

$$V(K_n) = \left(-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{n-1}. \tag{5.44}$$

Co więcej, wielomian Jonesa odróżnia od siebie dowolne dwa węzły pierwsze o co najwyżej 9 skrzyżowaniach. Dalej występują już kolizje, oto pełna ich lista do 10 skrzyżowań:

K_1	5_1	8_8	8_{16}	10_{22}	10_{25}	10_{40}	10_{41}	10_{43}	10_{59}	10_{60}	10_{71}	10_{73}	10_{81}	10_{137}
K_2	10_{132}	10_{129}	10_{156}	10_{35}	10_{56}	10_{103}	10_{94}	10_{91}	10_{106}	10_{86}	10_{104}	10_{83}	10_{109}	10_{155}

Jones wiedział, że wielomianowe niezmienniki nie radzą sobie z odróżnianiem od siebie mutantów, dlatego zapytał, czy jego wielomian wykrywa niewęzły. Pozostaje to otwartym problemem do dziś (patrz na przykład do zbioru problemów Ohtsukiego [344, s. 381]).

Hipoteza 5.2.11. *Niech K będzie węzłem. Jeśli $V_K(t) \equiv 1$, to K jest niewęzłem.*

Co przemawia za prawdziwością hipotezy? Wiemy, że jest prawdziwa w wielu szczególnych przypadkach: dla węzłów alternujących (wynika to z I hipotezy Taita 1.4.1), adekwatnych (Lickorish, Thistlethwaite [266]), póładekwatnych (dużo później Stojmenow [427]), dodatnich (także Stojmenow, chyba w [420]) oraz prawie alternujących: węzeł jest prawie alternujący, jeżeli nie jest alternujący, ale odwrócenie jednego skrzyżowania na pewnym diagramie sprawia, że takim się staje (Lowrance, Spyropoulos [280]). Homologia Chowanowa stanowi uogólnienie wielomianu Jonesa i wykrywa niewęzeł (patrz fakt 6.4.2).

Hipotezę zweryfikowano komputerowo dla węzłów o małej liczbie skrzyżowań. W latach dziewięćdziesiątych Hoste, Thistlethwaite, Weeks [191] zrobili to podczas tablicowania węzłów spełniających cr $K \leqslant 16$. Wynik poprawiano: Dasbach, Hougardy [107] w 1997 do cr $K \leqslant 17$; Yamada [471] w 2000 do cr $K \leqslant 18$; wreszcie Tuzun, Sikora [452] w 2016 do cr $K \leqslant 22$, potem (w [453]) w 2020 do cr $K \leqslant 24$. Ośmiordzeniowe procesory Intel Xeon L5520 z Uniwersytetu w Buffalo potrzebowały na to łącznie 41,8 lat pracy.

Co przemawia za nieprawdziwością hipotezy? Najpierw Thistlethwaite w [434] wskazał dwa sploty z dwoma oraz jeden z trzema ogniwami, których wielomian Jonesa nie odróżnia od niesplotów o takiej samej liczbie ogniw. Wynik bardzo szybko bardzo poprawiono: Eliahou, Kauffman i Thistlethwaite w pracy [123] znaleźli nieskończoną rodzinę splotów o tej samej własości. Kauffman znalazł dużo wcześniej nietrywialny węzeł wirtualny, którego wielomian Jonesa jest trywialny.

Fakt 5.2.12 Niech $k \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Istnieje nieskończenie wiele pierwszych

satelitów splotu Hopfa z k ogniwami, których wielomian Jonesa nie odróżnia od niesplotu z k ogniwami.

5.2.4 Relacja kłębiasta

Dotychczas wyznaczyliśmy wielomian Jonesa jedynie dla splotów trywialnych (fakt 5.2.10). Dlaczego? Chociaż klamra Kauffmana to użyteczne narzędzie podczas dowodzenia różnych teoretycznych własności, niezbyt nadaje się do obliczeń, szczególnie ręcznych. Na szczęście wtedy z pomocą przychodzi:

Definicja 5.2.13 Niech L będzie zorientowanym splotem. Wtedy wielomian Laurenta $V_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$, który spełnia relację kłębiastą

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0 \tag{5.45}$$

z warunkiem brzegowym $V(\bigcirc) = 1$, nazywamy wielomianem Jonesa.

Symbole L_+, L_-, L_0 objaśnione są przy definicji 5.1.10.

Dowód. Wyraźmy wielomian Jonesa przez klamrę Kauffmana i spin. Chcemy pokazać, że

$$A^4(-A)^{-3w(L_+)} \langle L_+ \rangle \tag{5.46}$$
$$-A^{-4}(-A)^{-3w(L_-)} \langle L_0 \rangle \tag{5.47}$$
$$+(A^2 - A^{-2})(-A)^{-3w(L_0)} \langle L_0 \rangle = 0. \tag{5.48}$$

Ale $w(L_\pm) = w(L_0) \pm 1$, zatem to jest równoważne z

$$-A \langle L_+ \rangle + A^{-1} \langle L_- \rangle + (A^2 - A^{-2}) \langle L_0 \rangle = 0. \tag{5.49}$$

Z definicji klamry Kauffmana wnioskujemy, że

$$\langle L_+ \rangle = A \langle L_0 \rangle + A^{-1} \langle L_\infty \rangle, \tag{5.50}$$
$$\langle L_- \rangle = A \langle L_\infty \rangle + A^{-1} \langle L_0 \rangle. \tag{5.51}$$

Pierwsze równanie przemnóżmy przez A, drugie przez A^{-1}, a następnie dodajmy obydwa do siebie. Wtedy otrzymamy

$$A \langle L_+ \rangle - A^{-1} \langle L_- \rangle = A^2(\langle L_0 \rangle - \langle L_\infty \rangle), \tag{5.52}$$

quod erat demonstrandum. ■

5.2.5 Lustra, rewersy. Sumy

Wielomian Jonesa nie wykrywa orientacji splotu:

Fakt 5.2.14 Niech L będzie zorientowanym splotem. Wtedy $V(rL) = V(L)$.

Dowód. Aby obliczyć wielomian rewersu, wykorzystujemy te same diagramy kłębiaste, jak dla zwykłego, a przy tym nie zmieniamy znaku żadnego skrzyżowania. ■

Wynika stąd, że wielomian Jonesa nie zależy od orientacji węzła (wszak ten ma tylko dwie orientacje). Ale jak pokazuje bezpośredni rachunek, dla niektórych splotów każda orientacja ogniw daje ten sam wielomian Jonesa (tak jest choćby dla splotu Whiteheada albo pierścieni Borromeuszy), dla innych dostajemy różne wielomiany (na przykład dla splotu Hopfa).

Wniosek 5.2.15 Wielomian Jonesa nie zależy od orientacji węzła.

Ale czasami potrafi odróżnić splot od jego lustra:

Fakt 5.2.16 Niech L będzie zorientowanym splotem. Wtedy $V(mL)(t) = V(L)(t^{-1})$.

(Prawie nikt nie chce podać rozumowania tak szczegółowego jak to poniższe, które udało się nam skraść z niedostępnej dziś nigdzie pracy Gellerta [154, s. 12]). Samo sformułowanie można znaleźć między innymi u Kawauchiego [219, fakt 10.4.4].

Dowód. Zauważmy, że diagramy L_- oraz L_+ są wzajemnymi lustrami. Dlatego każda relacja kłębiasta dla splotu postaci

$$t^{-1}V(L_+)(t) - tV(L_-)(t) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0)(t) = 0 \tag{5.53}$$

odpowiada pewnej relacji dla lustra splotu:

$$-tV(L_+)(t) + t^{-1}V(L_-)(t) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0)(t) = 0, \tag{5.54}$$

co po zamianie zmiennych $t \mapsto t^{-1}$ i przemnożeniu przez -1 daje

$$-t^{-1}V(L_+)(t^{-1}) + tV(L_-)(t^{-1}) + (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0)(t^{-1}) = 0, \tag{5.55}$$

co było do okazania. ∎

Wniosek 5.2.17 Jeśli K jest węzłem zwierciadlanym, to wielomian V_K jest symetryczny.

Implikacja odwrotna nie zachodzi na mocy wniosku 6.2.48: węzeł 9_{42} ma symetryczny wielomian Jonesa, ale niezerową sygnaturę. Poniżej trzynastu skrzyżowań kontrprzykładów z niezerową sygnaturą jest 14 (9_{42}, 10_{125}, $11n_{19}$, $11n_{24}$, $11n_{82}$, $12a_{669}$, $12a_{1171}$, $12a_{1179}$, $12a_{1205}$, $12n_{362}$, $12n_{506}$, $12n_{562}$, $12n_{571}$, $12n_{821}$), z zerową – kolejne 28.

Wniosek 5.2.18 Jeśli K jest węzłem zwierciadlanym, to jego wielomian HOMFLY spełnia równość

$$P(a, z) = P(a^{-1}, z), \tag{5.56}$$

zaś wielomian Kauffmana:

$$F(a, z) = F(a^{-1}, z). \tag{5.57}$$

Dla trójlistnika nie mamy równości $V(mL)(t) = V(L)(t^{-1})$, zatem ten nie jest swym lustrem. Wcześniejszy przykład 2.1.5 opowiada, jak z dużo większym wysiłkiem pokazał to samo Dehn. (To trochę podejrzane, ale nie znamy żadnego innego dowodu!).

Równość $\nabla(z) = \nabla(-z)$ zachodzi dla wszystkich węzłów, zwierciadlanych lub nie.

Fakt 5.2.19 Niech L_1, L_2 będą zorientowanymi splotami. Wtedy

$$V(L_1 \sqcup L_2) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_1)V(L_2). \tag{5.58}$$

Dowód. Wybierzmy diagramy D_1, D_2 dla splotów L_1, L_2. Po podstawieniu $t^{1/2} = A^{-2}$ widzimy, że chcemy pokazać

$$(-A)^{-3w(D_1 \sqcup D_2)}\langle D_1 \sqcup D_2\rangle = (-A^2 - A^{-2})(-A)^{-3(w(D_1)+w(D_2))}\langle D_1\rangle\langle D_2\rangle. \tag{5.59}$$

Oczywiście $w(D_1 \sqcup D_2) = w(D_1) + w(D_2)$, więc wystarczy udowodnić, że

$$\langle D_1 \sqcup D_2\rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle D_1\rangle\langle D_2\rangle. \tag{5.60}$$

Oznaczmy przez $f_1(D_1)$, $f_2(D_1)$ odpowiednio lewą i prawą stronę ostatniego równania. Są to wielomiany Laurenta, które zależą tylko od D_1. Aksjomaty Kauffmana pozwalają na pokazanie, że obie funkcje mają następujące własności:

$$f_i(\bigcirc) = (-A^2 - A^{-2})\langle D_2\rangle \tag{5.61}$$

$$f_i(D_1 \sqcup \bigcirc) = (-A^2 - A^{-2})f_i(D_1) \tag{5.62}$$

$$f_i(\times) = Af_i(\,)\,(\,) + A^{-1}f_i(\asymp). \tag{5.63}$$

Ponieważ powyższe tożsamości wystarczają do wyznaczenia wartości funkcji f_i dla dowolnego diagramu D_1, dochodzimy do wniosku, że $f_1 \equiv f_2$. To kończy dowód. ■

Fakt 5.2.20 Niech K_1, K_2 będą zorientowanymi węzłami. Wtedy

$$V(K_1 \# K_2) = V(K_1)V(K_2). \tag{5.64}$$

Dowód. Rozpatrzmy sploty



Relacja kłębiasta orzeka w tym przypadku, że

$$t^{-1}V(K_1 \# K_2) - tV(K_1 \# K_2) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(K_1 \sqcup K_2) = 0. \tag{5.65}$$

Ostatni składnik sumy można rozwinąć na mocy faktu 5.2.19. Po uporządkowaniu dostaniemy:

$$(t^{-1} - t)V(K_1 \# K_2) - (t^{-1} - t)V(K_1)V(K_2) = 0, \tag{5.66}$$

a stąd widać już prawdziwość dowodzonej tezy. ■

5.2.6 Wartości w pierwiastkach jedności

Niech L będzie splotem mającym n ogniw, zaś V jego wielomianem Jonesa. Wtedy wartości $V(\omega)$ w niektórych pierwiastkach jedności są związane z innymi niezmiennikami węzłów.

I tak przyjmując oznaczenie $\omega_k = \exp(2\pi i/k)$ mamy

Fakt 5.2.21 $V_L(\omega_3) = 1$.

Fakt 5.2.22 $V_L(1) = (-2)^{n-1}$.

Dowód. Jak wkrótce się przekonamy, to proste wnioski z relacji kłębiastej. Explicite wskazał je Jones [203, twierdzenie 14, 15]. ■

Fakt 5.2.23 Pochodna w punkcie $t = 1$ znika: $V'_L(1) = 0$.

Dowód. Jones [203, twierdzenie 16]. ■

Fakt 5.2.24 $V_L(\omega_6) = \pm i^{n-1} \cdot (\sqrt{3}i)^r$, gdzie r jest rangą pierwszej grupy homologii podwójnego rozgałęzionego nakrycia L nad $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Przytycki [367, s. 200] pisze, że $\tau_3 L = 3|V_L^2(\omega_6)|$.

Dowód. Znak $\pm$ został wyznaczony przez Lipsona [269], praca ta zawiera też odsyłacz do pracy Milletta, Lickorisha [263], którzy wyprowadzają resztę wzoru. ■

Fakt 5.2.25 Liczba trzy-kolorowań splotu L wynosi $3|V_L(\omega_6)|^2$.

Dowód. Przytycki [368] (chociaż znał tę równość wcześniej, [367, s. 200], gdzie pokazuje też, że $\tau_3 L = 3|F_L(1,-1)|$). ■

Fakt 5.2.26 Jeśli L jest właściwym splotem (indeks zaczepienia każdej składowej o resztę splotu jest parzysty), to $V_L(i) = (\sqrt{2})^{n-1}(-1)^{\operatorname{Arf} L}$. W przeciwnym razie $V_L(i) = 0$.

Dowód. Murakami [314], ta praca jest wyjątkowo krótka (tylko 3 strony). ■

Fakt 5.2.27 Niech L będzie splotem z podwójnym nakryciem p sfery rozgałęzionym nad ogniwami L, zaś H_1 pierwszą grupą homlologii p. Jeśli grupa H_1 jest torsyjna, to $V_L(-1) = |H_1|$; w przeciwnym razie $V_L(-1) = 0$.

Nie znamy dowodu tego faktu: Ohtsuki [344, s. 383] pisze tylko *„It is known that $|V_L(-1)|$ is equal to the order of $H_1(M_{2,L})$”*. :(

Nie jest znana topologiczna interpretacja wielomianu Jonesa (którą posiada wielomian Alexandera) ani charakteryzacja poza warunkami koniecznymi z pięciu faktów powyżej.

Wniosek 5.2.28 Niech K będzie węzłem. Wtedy

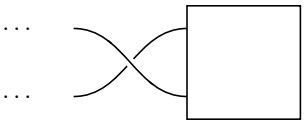
$$V(1) = 1, \tag{5.67}$$
$$V(-1) = \pm \det K, \tag{5.68}$$
$$V(i) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \Delta(-1) \equiv \pm 1 \mod 8 \\ -1 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}. \tag{5.69}$$

Poza powyżej opisanymi przypadkami, wartości wielomianu Jonesa nie można znaleźć w czasie wielomianowym od ilości skrzyżowań na diagramie (jest to problem $\#P$-trudny).

5.2.7 Hipotezy Taita

W tej podsekcji definiujemy stan oraz wygładzenie diagramu, następnie wyprowadzamy wzór o sumowaniu stanów oraz dowodzimy prawdziwości dwóch technicznych lematów. Pozwoli to oszacować rozpiętość wielomianu Jonesa, skąd bezpośrednio wynika już I hipoteza Taita 1.4.1. Nie odbiega to znacząco od podejścia Kauffmana [212]. Na koniec naszkicujemy krótko dowody pozostałych hipotez.

Definicja 5.2.29 Wąskie skrzyżowanie między dwiema rozłącznymi częściami diagramu nazywamy przesmykiem.



Diagram, na którym nie ma żadnych przesmyków, nazywamy zredukowanym.

Słowo przesmyk pochodzi z teorii grafów, skrzyżowanie jest przesmykiem dokładnie wtedy, gdy odpowiadająca mu krawędź w grafie węzła jest przesmykiem, czyli jej usunięcie zwiększa liczbę składowych spójności. Tam używa się także określenia most, które u nas ma już zarezerwowane inne znaczenie. Poza tym w tej książce nie ma grafów.

Definicja 5.2.30 — diagram spójny. Diagram, którego nie można podzielić na dwie niepuste części niespotykające się na żadnym skrzyżowaniu, nazywamy spójnym.

Jeżeli diagram nie jest spójny, możemy przesunąć rozłączne ogniwa na siebie przy użyciu II ruchu Reidemeistera. Hipoteza Taita mówi coś o zredukowanych, spójnych i alternujących diagramach.

Definicja 5.2.31 — stan. Niech D będzie diagramem splotu. Każdą funkcję s ze zbioru skrzyżowań diagramu D o wartościach ± 1 nazywamy stanem. Sumę wszystkich wartości s oznaczamy $|s|$.

Definicja 5.2.32 Niech L będzie splotem, D jego diagramem, zaś s stanem. Diagram powstały przez wygładzenie wszystkich skrzyżowań zgodnie z ich stanem oznaczamy sD. Nowy diagram składa się z pewnej liczby zamkniętych, nieprzecinających się krzywych. Liczbę tę oznaczamy $|sD|$.

Fakt 5.2.33 — o sumowaniu stanów. Niech D będzie diagramem splotu. Wtedy

$$\langle D\rangle = \sum_s (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1} A^{|s|}, \tag{5.70}$$

gdzie sumujemy po wszystkich stanach s dla diagramu D.

Dla wygody wprowadźmy skrót $\langle D \mid s\rangle := (-A^{-2} - A^2)^{|sD|-1} A^{|s|}$.

Dowód. Oznaczmy prawą stronę dowodzonej równości przez $[D]$. Pokażemy, że spełnia ona trzy aksjomaty Kauffmana z definicji 5.2.4, skąd wynika już, że $[D] = \langle D\rangle$.

Pierwszy aksjomat (równość 5.30) mówi o niewęźle ◯. Posiada on tylko jeden stan s dany wzorem $|s| = 0$, zatem $|s\bigcirc| = 1$ oraz $[D] = (-A^2 - A^{-2})^0 \cdot A^0 = 1$.

By pokazać, że funkcja $[\,\cdot\,]$ spełnia drugi aksjomat (równość 5.31) zauważmy, że diagramy $D \sqcup \bigcirc$ oraz D mają te same skrzyżowania, więc możemy utożsamiać stany s dla D ze stanami u dla $D \sqcup \bigcirc$. Wtedy $|u| = |s|$ oraz $|u(D \sqcup \bigcirc)| = |sD| + 1$. Zatem

$$[D \sqcup \bigcirc] = \sum_u (-A^2 - A^{-2})^{|u(D\sqcup\bigcirc)|-1} A^{|u|} \tag{5.71}$$

$$= \sum_s (-A^2 - A^{-2})^{|sD|} A^{|s|} \tag{5.72}$$

$$= (-A^2 - A^{-2})[D]. \tag{5.73}$$

Pozostał ostatni aksjomat, równość 5.32. Bezpośrednio z definicji mamy

$$A\left[\,\right)\ \left(\,\right] = \sum_u (-A^2 - A^{-2})^{|u)\,(|-1} A^{|u|+1}, \tag{5.74}$$

gdzie u przebiega wszystkie stany $)\,($. Ale $)\,($ to $\times$ z ustalonym skrzyżowaniem c wygładzonym dodatnio, co daje bijekcję między wszystkimi stanami u diagramu $)\,($ oraz tymi stanami s diagramu $\times$, dla których $s(c) = +1$. Wtedy $|s\times| = |u)\,(|$, $|s| = |u| + 1$ oraz

$$A\left[\,\right)\ \left(\,\right] = \sum_u (-A^2 - A^{-2})^{|u)\,(|-1} A^{|u|+1} \tag{5.75}$$

$$= \sum_{s(c)=1} (-A^2 - A^{-2})^{|s\times|-1} A^{|s|}, \tag{5.76}$$

podobne rozumowanie pokazuje, że

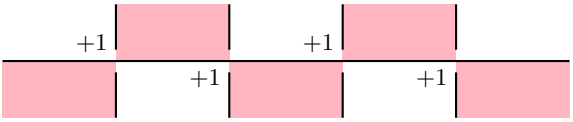
$$A^{-1}\left[\,\right)\left(\,\right] = \sum_{s(c)=-1} (-A^2 - A^{-2})^{|s\times|-1} A^{|s|}. \tag{5.77}$$

Dodanie do siebie równań 5.76 oraz 5.77 kończy dowód. ■

Zbadamy następnie dwa najprostsze stany dowolnego diagramu.

Definicja 5.2.34 Stan przypisujący wartość $+1$ (-1) każdemu skrzyżowaniu oznaczamy s_+ (s_-).

Niech D będzie alternującym, zredukowanym diagramem spójnym. Wtedy wszystkie jego skrzyżowania mają ten sam znak. Wybierzmy dla niego to uszachowienie, w którym wszystkie skrzyżowania są dodatnie:



Nazywamy je uszachowieniem *standardowym*. Porównajmy wygładzenie s_+D z s_-D:



Zamknięte krzywe tworzące s_+D są brzegami jasnych obszarów uszachowienia, podczas gdy te tworzące s_-D stanowią brzeg ciemnych obszarów. Zauważmy jeszcze, że na każdym skrzyżowaniu występują cztery różne ciemne i jasne obszary: gdyby pewien obszar dotykał tam sam siebie, mielibyśmy do czynienia w tym miejscu z przesmykiem, a założyliśmy przecież, że diagram jest zredukowany.

Lemat 5.2.35. *Niech D będzie spójnym diagramem splotu o n skrzyżowaniach. Wtedy*

$$|s_+D| + |s_-D| \leqslant n + 2, \tag{5.78}$$

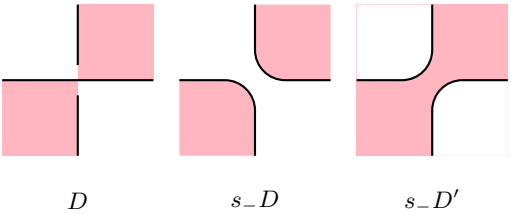
z równością, gdy diagram D jest alternujący i zredukowany.

Dowód. Skorzystamy z indukcji względem n. Łatwo widać prawdziwość lematu dla $n = 0$. Załóżmy, że jest on prawdziwy dla wszystkich diagramów o $n-1$ skrzyżowaniach, następnie ustalmy diagram D o n skrzyżowaniach.

Wybierzmy skrzyżowanie na diagramie D. Można je wygładzić na dwa sposoby, jeden z nich daje spójny diagram D'. Bez straty ogólności przyjmijmy, że dzieje się tak podczas dodatniego wygładzenia. Wtedy zachodzi $|s_+D'| = |s_+D|$, ale $|s_-D'| = |s_-D| \pm 1$, gdyż diagram s_-D' powstaje z s_-D po zastąpieniu pewnej części) (przez ⌣. To rozrywa jedną krzywą na dwa kawałki lub scala dwie krzywe w jedną. Z założenia indukcyjnego mamy

$$\begin{aligned} |s_+D| + |s_-D| &= |s_+D'| + |s_-D'| \pm 1 && (5.79)\\ &\leqslant (n-1) + 2 \pm 1 && (5.80)\\ &\leqslant n + 2. && (5.81) \end{aligned}$$

Załóżmy, że diagram D jest spójny, alternujący i zredukowany. Nierówność 5.80 jest tak naprawdę równością jako powtórzenie założenia indukcynego. Z drugiej strony zachodzi $|s_-D'| = |s_-D| - 1$, ponieważ przejście od s_-D do s_-D' skleja dwa ciemne obszary:



Oznacza to, że nierówność 5.81 także jest równością, quod erat demonstrandum. ■

Lemat 5.2.36. *Niech D będzie diagramem splotu o n skrzyżowaniach. Wtedy*

$$\operatorname{maxdeg}\langle D\rangle \leqslant n - 2 + 2|s_+ D| \tag{5.82}$$
$$\operatorname{mindeg}\langle D\rangle \geqslant 2 - n - 2|s_- D| \tag{5.83}$$

z równością, jeżeli D jest alternujący, zredukowany i spójny.

Dowód. Ponieważ dowody tych nierówności przebiegają analogicznie, ograniczymy się do pierwszej z nich. Dla oszczędności miejsca będziemy pisać M zamiast maxdeg.

Niech s będzie dowolnym stanem. Istnieje wtedy ciąg stanów $s_+ = s_0, s_1, \ldots, s_r = s$, w którym stan s_{i+1} powstaje z s_i przez zmianę wartości w jednym ze skrzyżowań z $+1$ na -1. Skoro diagram $s_{i+1}D$ uzyskujemy z s_iD przez połączenie dwóch zamkniętych krzywych lub podział jednej krzywej na dwie części, mamy: $|s_{i+1}| = |s_i| - 2$ oraz $|s_{i+1}D| = |s_iD| \pm 1$. Wnioskujemy stąd, że

$$M\langle D \mid s_{i+1}\rangle = 2|s_{i+1}D| + |s_{i+1}| - 2 \tag{5.84}$$
$$= (2|s_iD| + |s_i| - 2) + (\pm 2 - 2) \tag{5.85}$$
$$\leqslant M\langle D|s_i\rangle. \tag{5.86}$$

Powtarzając odpowiednio wiele razy, dostajemy łańcuch nierówności

$$M\langle D \mid s\rangle = M\langle D \mid s_r\rangle \leqslant \ldots \leqslant M\langle D \mid s_0\rangle = M\langle D \mid s_+\rangle. \tag{5.87}$$

Zauważmy, że dla każdego stanu s zachodzi $M\langle D|s\rangle = 2|sD| + |s| - 2$. Zatem

$$M\langle D \mid s\rangle \leqslant 2|s_+D| + |s| - 2 = 2|s_+D| + n - 2, \tag{5.88}$$

co kończy dowód pierwszej części lematu.

Załóżmy teraz, że diagram D jest zredukowany, alternujący i spójny. Chcemy pokazać, że stan s_+ dominuje nad pozostałymi: żaden inny nie wnosi do sumy wyrazu z takim samym najwyższym wykładnikiem. Czy warunek $s \neq s_+$ implikuje $M\langle D|s\rangle < M\langle D|s_+\rangle$? Dzięki łańcuchowi nierówności wystarczy sprawdzić to tylko dla tych stanów s, które powstają z s_+ przez zmianę pojedynczej wartości $+1$ na -1. Ale to już jest oczywiste, gdyż sD otrzymujemy przez sklejenie dwóch jasnych obszarów s_+D. ■

Możemy wreszcie zająć się rozpiętością wielomianu Jonesa. Użyjemy rozpiętości:

Definicja 5.2.37 — rozpiętość. Niech f będzie wielomianem Laurenta jednej zmiennej X. Różnicę między najwyższą i najniższą potęgą X występującą w f,

$$\operatorname{span} f = \operatorname{maxdeg} f - \operatorname{mindeg} f, \tag{5.89}$$

nazywamy rozpiętością wielomianu f.

■ **Przykład 5.2.38** $\operatorname{span}(-t + 3 - 1/t) = 1 - (-1) = 2.$ ■

Fakt 5.2.39 Niech D będzie spójnym diagramem z n skrzyżowaniami zorientowanego splotu L. Wtedy span $V(L) \leqslant n$, z równością dla zredukowanego i alternującego D.

Dowód. Pokażemy prawdziwość innego, równoważnego stwierdzenia: span$\langle D\rangle \leqslant 4n$. Dwa poprzednie lematy 5.2.35 oraz 5.2.36 mówią razem, że

$$\begin{aligned} \text{span}\langle D\rangle &= M\langle D\rangle - m\langle D\rangle && (5.90)\\ &\leqslant (2|s_+D| + n - 2) + (2|s_-D| + n - 2) && (5.91)\\ &= 2(|s_+D| + |s_-D|) + 2n - 4 && (5.92)\\ &\leqslant 2(n+2) + 2n - 4 = 4n. \end{aligned}$$

■

Hipoteza 5.2.40 (Taita, pierwsza). *Zredukowany, spójny, alternujący diagram D zorientowanego splotu L realizuje jego indeks skrzyżowaniowy.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje diagram o mniejszej liczbie skrzyżowań. ■

Szukanie wielomianu Jonesa splotu bywa uciążliwe, jednak czasami możemy oszacować jego rozpiętość korzystając z następujących nierówności:

Wniosek 5.2.41 Niech L będzie zorientowanym splotem ze spójnym diagramem D, na którym widać n skrzyżowań. Wtedy

$$3w(D) - 2|s_+D| + 2 - n \leqslant 4m(V(L)) \quad (5.93)$$
$$3w(D) + 2|s_-D| + n - 2 \geqslant 4M(V(L)), \quad (5.94)$$

z równością dla zredukowanego i alternującego D.

Dowód. Wystarczy powołać się na definicję 5.2.8 oraz lemat 5.2.36. ■

Porwaliśmy się z motyką na słońce obiecując, że uzasadnimy także pozostałe hipotezy. Dowodu II hipotezy Taita nie ma tutaj, bo jest w pracy Kauffmana [212]. Dowód III hipotezy korzysta z różnych technik: pracy Menasco o czterokrotnie przekłutej 2-sferze w dopełnieniu splotu, z własności wielomianów V i F znalezionych przez Thistlethwaite'a oraz nieściśliwych powierzchni z niepołudnikowym brzegiem... znowu, za dużo pisania.

Czwarta hipoteza wynika dla alternujących węzłów z drugiej, ponieważ odbicie lustrzane diagramu zamienia ze sobą dodatnie i ujemne skrzyżowania, a zatem neguje spin. Założenia, że węzeł jest alternujący nie można pominąć, patrz tekst za przykładem 2.1.8.

Fakt 5.2.42 Dla każdego nieparzystego $n \geqslant 15$ istnieje pierwszy, zwierciadlany węzeł K, którego indeksem skrzyżowaniowym jest n.

Czekamy na publikację pracy Stojmenowa [424] w recenzowanym czasopiśmie.

5.3 Wielomian HOMFLY-PT

Po tym, jak Jones przedstawił światu swój wielomian w 1984 roku, matematycy zaczęli szukać jego uogólnienia zależnego nie od jednej, lecz dwóch zmiennych. Pierwszym takim węzłowym niezmiennikiem okazał się wielomian HOMFLY. Jego nazwa pochodzi od sześciu odkrywców: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter z pracy [146].

Dwa lata później i niezależnie od nich, Przytycki z Traczykiem otrzymał ten sam obiekt w [371]. Michael McDaniel w artykule „Knots to You" pisze, że często pomija się litery PT (i mówi o wielomianie HOMFLY), ponieważ polska poczta była spowolniona w latach osiemdziesiątych przez ruch solidarnościowy i artykuł [371] nie dotarł na czas do redakcji AMS!

Definicja 5.3.1 — wielomian HOMFLY. Niech L będzie zorientowanym diagramem splotu. Wielomian Laurenta P dwóch zmiennych, który spełnia relację kłębiastą

$$l \cdot P_{L_+} + l^{-1} \cdot P_{L_-} + m \cdot P_{L_0} = 0 \tag{5.95}$$

z warunkiem brzegowym $P(\bigcirc) \equiv 1$ oraz jest niezmienniczy na izotopie i trzy ruchy Reidemeistera, nazywamy wielomianem HOMFLY.

Symbole L_+, L_-, L_0 objaśnione są przy definicji 5.1.10. Litery l, m pochodzą od nazwisk odkrywców: Lickorisha i Milletta. To dość mylące, ale niektórzy używają innych zmiennych:

Definicja 5.3.2 — HOMFLY inaczej. $a \cdot P_{L_+} - a^{-1} \cdot P_{L_-} = z \cdot P_{L_0}$. (Czasami zamiast a pisze się v).

Definicja 5.3.3 — HOMFLY jeszcze inaczej. $\alpha^{-1} \cdot P_{L_+} - \alpha \cdot P_{L_-} = z \cdot P_{L_0}$.

Definicja 5.3.4 — HOMFLY jednorodny. $x \cdot S_{L_+} - y \cdot S_{L_-} - z \cdot S_{L_0} = 0$.

Jednorodny wielomian HOMFLY można znaleźć na przykład w [265, s. 10] albo [328, s. 231]. Murasugi podaje tam jako ćwiczenie równości:

$$P(\alpha, z) = S(\alpha^{-1}, \alpha, z) \tag{5.96}$$

$$S(x, y, z) = P(\sqrt{y/x}, z/\sqrt{xy}). \tag{5.97}$$

Relacja kłębiasta pozwala wywnioskować własności wielomianu sumy spójnej i prostej. Potrzebować będziemy lematu:

Lemat 5.3.5. *Wielomianem HOMFLY dla niesplotu o n ogniwach jest*

$$P(U_n) = \left(-\frac{l + 1/l}{m}\right)^{n-1}. \tag{5.98}$$

Można potraktować to jako proste ćwiczenie z indukcji matematycznej, pozostawiam je uwadze Czytelnika.

Fakt 5.3.6 Niech L_1, L_2 będą splotami. Wtedy

$$P(L_1 \sqcup L_2) = -\frac{l+1/l}{m} \cdot P(L_1)P(L_2) \tag{5.99}$$

$$P(L_1 \# L_2) = P(L_1)P(L_2). \tag{5.100}$$

Dowód przebiega analogicznie do dowodu „multiplikatywności" wielomianów Alexandera (fakty 5.1.9) oraz Jonesa (fakt 5.2.19, 5.2.20).

Patrz też https://math.stackexchange.com/a/399405.

Dowód. Każdy splot L jest kombinacją liniową (o współczynnikach będących wielomianami w m oraz l) niesplotów U_k o różnej liczbie składowych k. Mamy więc

$$L_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k U_k, \quad L_2 = \sum_{k=1}^{n} b_k U_k. \tag{5.101}$$

Skorzystamy w tym miejscu z lematu 5.3.5. Wynika z niego, że $P(U_i)P(U_j) = P(U_{i+j-1})$ i bezpośrednio

$$P(L_1)P(L_2) = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{i=1}^{k-1} a_i b_{k-i} P(U_{k-1}). \tag{5.102}$$

Pozostało spojrzeć na sumę spójną diagramów $L_1 \# L_2$. Jeśli usuniemy teraz wszystkie skrzyżowania z diagramu L_1 relacją kłębiastą, dostaniemy $L_1 \# L_2 = \sum_{k=1}^{n} a_k (U_{k-1} \cup L_2)$, gdyż jedna z niezawęzlonych składowych zostanie wchłonięta do diagramu diagramu L_2. Rozwijamy dalej i otrzymujemy

$$L_1 \# L_2 = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(U_{k-1} \cup \sum_{k=1}^{n} b_k U_k \right) \tag{5.103}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \sum_{i=1}^{k-1} a_i b_{k-i} U_{i-1} \cup U_{k-i} \tag{5.104}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \sum_{i=1}^{k-1} a_i b_{k-i} U_{k-1}, \tag{5.105}$$

co kończy dowód. ■

Nie wiemy jeszcze, czy definicja 5.3.1 pozwala wyliczyć wielomian w skończenie wielu krokach. Zauważmy, że wyznaczenie nawiasu Kauffmana było prostsze, ponieważ w każdym kroku liczba skrzyżowań ulegała zmniejszeniu. Teraz powołamy się na lemat 3.2.2.

Fakt 5.3.7 Wielomian HOMFLY można wyznaczyć w skończenie wielu krokach.

Dowód. Niech L będzie splotem, którego wielomian HOMFLY próbujemy wyznaczyć. Ustalmy jego dowolny diagram i wybierzmy jedno ze skrzyżowań, które należy odwrócić, by uzyskać niesplot. Takie skrzyżowanie istnieje na mocy lematu 3.2.2. Początkowy diagram odpowiada albo L_+, albo L_- w relacji kłębiastej dla tego skrzyżowania; jego wielomian jest różnicą wielomianów pozostałych dwóch diagramów (o mniejszej liczbie skrzyżowań!). Powtarzając procedurę dojdziemy do splotów trywialnych.

Jeśli powołamy się na wniosek 5.3.5, dowód zostanie zakończony. ■

Porównajmy wielomian HOMFLY ze znanymi już wielomianami Alexandera Δ oraz Jonesa V. Żaden z nich nie jest mocniejszy od drugiego, istnieją pary węzłów rozróżnialne przez dokładnie jeden. Na przykład 4_1 oraz $11n_{19}$ mają różne tylko wielomiany Alexandera, zaś 8_{10} oraz 10_{143} różne tylko wielomiany Jonesa.

Fakt 5.3.8 Wielomian HOMFLY jest mocniejszy niż wielomiany Jonesa i Alexandera jednocześnie.

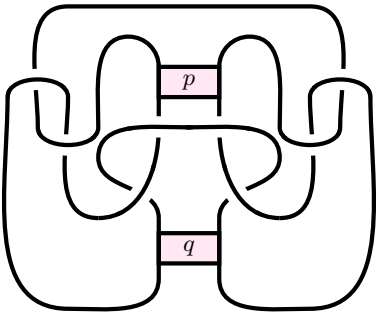
Dowód. Podstawiając $l = it^{-1}, m = i(t^{-1/2} - t^{1/2})$ w definicji dostajemy relację kłębiastą dla wielomianu Jonesa. Wielomian Alexandera otrzymamy kładąc $l = i, m = i(t^{-1/2} - t^{1/2})$. Stąd wynika, że wielomian HOMFLY jest co najmniej tak samo mocny jak Δ oraz V.

Wielomian HOMFLY odróżnia 11_{388} od swojego odbicia, wielomiany Jonesa i Conwaya nie, więc jest istotnie mocniejszy. ■

Pomimo swej mocy nie jest jednak niezmiennikiem zupełnym, nigdy nie odróżnia od siebie mutantów (to fakt 7.2.22). Konkretne przykłady kolizji, tym razem nie mutantów, to 5_1 oraz 10_{132}, 8_8 oraz 10_{129}, 8_{16} oraz 10_{156} albo 10_{25} oraz 10_{56}. Co bardziej dramatyczne, Kanenobu [206] wskazał przy użyciu elementarnych metod (!):

Fakt 5.3.9 Istnieje przeliczalna rodzina węzłów, której wszystkie elementy są hiperboliczne, taśmowe, rozwłóknione, trzymostowe, o genusie 2 oraz nieodróżnialne od siebie wielomianem HOMFLY.

Niedowód. Rozpatrzmy rodzinę węzłów $K(p, q)$, gdzie całkowite liczby p, q oznaczają ile razy wykonano pełny skręt wewnątrz prostokąta:



I tak zachowując oznaczenia z pracy [206], mamy trzy lematy:

1. $K(p, q) = K(q, p)$.
2. węzły $K(p, q)$ i $K(p', q')$ mają ten sam moduł Alexandera wtedy i tylko wtedy, gdy $|p - q| = |p' - q'|$.
3. węzły $K(p, q)$ i $K(p', q')$ mają ten sam wielomian Jonesa (HOMFLY) wtedy i tylko wtedy, gdy $p + q = p' + q'$.

Wynika stąd, że węzły $K(p, q)$, gdzie $p \geqslant q$, są parami różne.

Dalej, węzeł $K(p, q)$ jest zawsze trzymostowy (lemat 4); prawie zawsze hiperboliczny (chyba że $p = q = 0$); zwierciadlany wtedy i tylko wtedy, gdy $p + q = 0$. Autor twierdzi, że

dowód włóknistości, taśmowości i bycia genusu 2 zamieścił wcześniej w [205], ale to jest po francusku. ■

Natomiast:

Fakt 5.3.10 Istnieje nieskończenie wiele węzłów dwumostowych genusu $g > 0$ i nieskończenie wiele rozwłóknionych węzłów dwumostowych, ale (dla ustalonego g) tylko skończenie wiele rozwłóknionych węzłów dwumostowych genusu g.

Wielomian HOMFLY jest niezmiennikiem splotów zorientowanych, ale możemy go użyć także do porównywania obiektów bez orientacji. Jeśli wielomiany dwóch splotów, niezależnie od orientacji ich ogniw, są zawsze różne, to same sploty też są różne. Dunfield, Garoufalidis, Szumakowicz, Thistlethwaite w [120] znaleźli diagram pewnego węzła o 75 skrzyżowaniach, którego kablowe mutacje zachowują wielomiany Jonesa oraz Alexandera, ale nie zachowują wielomianu HOMFLY. Wiadomo, że jeśli istnieje prostszy przykład, to ma co najmniej 13 skrzyżowań.

Zaletą wielomianu HOMFLY jest to, że często wykrywa chiralność (węzeł chiralny nie jest równoważny swemu lustrzanemu odbiciu), ale nie odróżnia enancjomerów węzłów 9_{42}, 10_{48}, 10_{71}, 10_{91}, 10_{104}, oraz 10_{125}. Wśród węzłów do 10 skrzyżowań dokładnie dwa opierają się testom chiralności opartym na niezmiennikach HOMFLY oraz Kauffmana: 9_{42} oraz 10_{71}. Do jej wykrycia potrzebna jest na przykład $SU(2)$-teoria Cherna-Simonsa, wyjaśniona w kolejnej wersji tego skryptu.

5.4 Wielomian BLM/Ho

Na przełomie grudnia 1984 oraz stycznia 1985 roku, Nowiński zasugerował uwzględnienie czwartego diagramu w relacji kłębiastej, poza L_+, L_-, L_0. Nie udało się uzyskać niezmiennika splotów. Sukces odnieśli, dla niezorientowanych splotów, mniej więcej rok później Brandt, Lickorish, Millett [51] oraz Ho (w pracy doktorskiej [188]).

Definicja 5.4.1 — wielomian BLM/Ho. Niezmiennik zdefiniowany relacją kłębiastą

$$Q_{L_+}(x) + Q_{L_-}(x) = x(Q_{L_0}(x) + Q_{L_\infty}(x)), \tag{5.106}$$

z warunkiem początkowym $Q(\bigcirc) = 1$ nazywamy wielomianem BLM/Ho.

Jest multiplikatywny. Nie odróżnia luster ani mutantów (patrz definicja 7.2.19) i potrafi liczyć ogniwa: jeśli jest ich c, to najmniejszą potęgą x występującą w wielomianie Q_L jest x^{1-c}. Jego stopień nie przekracza indeksu skrzyżowaniowego.

Mamy ([51]) jawne wzory na wartości wielomianu BLM/Ho w czterech punktach:

Fakt 5.4.2 Niech L będzie splotem. Wtedy $Q_L(1) = 1$.

Fakt 5.4.3 Niech L będzie splotem. Wtedy $Q_L(2) = (\det L)^2$.

Fakt 5.4.4 Niech L będzie splotem o c ogniwach. Wtedy $Q_L(-2) = (-1)^{c-1}$.

Fakt 5.4.5 Niech L będzie splotem. Jeżeli dwukrotne nakrycie L ma homologię modulo 3 wymiaru d, to $Q_L(-1) = 3^d$.

Jones zauważył później, że wielomian Q dostarcza jeszcze jednej informacji na temat homologii:

Fakt 5.4.6 Niech L będzie splotem. Jeżeli dwukrotne nakrycie L ma homologię modulo 5 wymiaru e, to $Q_L((-1 \pm \sqrt{5})/2) = 5^{e/2}$.

Co można powiedzieć o innych homologiach tego nakrycia? Niedawno Stojmenowi [418] udało się udowodnić, że licząc wartość wielomianu Q w innym ustalonym punkcie nie można dowiedzieć się więcej o homologiach modulo p.

Miyazawa [300] znalazł nieskończenie wiele węzłów i splotów o trywialnych wielomianach Q (BLM/Ho) oraz ∇ (Conwaya), ale różnych wielomianach HOMFLY-PT. Tylko dwa węzły pierwsze o co najwyżej 16 skrzyżowaniach mają trywialny wielomian Q, są to $16n_{389841}$ oraz $16n_{491778}$.

Kanenobu w pracy [207] podał prosty test potrafiący czasem wykrywać, które węzły nie są dwumostowe. Jak pisze Stojmenow w [415]: *„The converse of this criterion turns out not to be true; (…) these examples have been suggested by empirical calculations (…), which nevertheless reveal 5.107 to be a surprisingly powerful test"*. Jakość testu można ocenić patrząc na węzły o małej liczbie skrzyżowań. Po pierwsze, wykrywa wszystkie niewymierne węzły pierwsze co najmniej do 10 skrzyżowań oraz rozstrzyga o wymierności dowolnego pierwszego, alternującego węzła co najmniej do 16 skrzyżowań. Zawodzi natomiast dla następujących węzłów pierwszych do 15 skrzyżowań: 12_{1879}, 12_{2037}, 13_{7750}, 13_{7960}, 14_{33787}, 14_{43535}, 14_{44370}, 14_{46672}, 14_{46862}, 15_{157719}, 15_{168643}, 15_{233158}, 15_{247180}.

Fakt 5.4.7 Jeśli L jest splotem dwumostowym, to

$$(-u - u^{-1})[Q_L(-u - u^{-1}) - 1] = 2(V_L(u)V_L(u^{-1}) - 1). \tag{5.107}$$

Jednocześnie:

Hipoteza 5.4.8. *Równość 5.107 nie zachodzi dla żadnego węzła złożonego.*

Stojmenow [415, s. 474] zauważa, że jeśli hipoteza jest fałszywa, to kontrprzykład do niej musi być niealternujący, co wynika z prac Menasco [294], Kidwella [222] i Thistlethwaite'a [432]. Praca [415, s. 477] kończy się postawieniem jeszcze jednego problemu:

Hipoteza 5.4.9. *Niech K_1, K_2 będą dwoma węzłami o tym samym wielomianie F Kauffmana. Czy możliwe jest, by jeden z nich był węzłem wymiernym, zaś drugi niewymiernym?*

Wiadomo, że zarówno wśród węzłów wymiernych, jak i niewymiernych, istnieją węzły nierozróżnialne od siebie przy pomocy wielomianu F Kauffmana. Opisujemy go w kolejnej sekcji.

5.5 Wielomian Kauffmana

Mniej więcej w tym samym czasie, gdy odkryto wielomian BLM/Ho, Kauffman [213] opisał sposób, jak uogólnić ten niezmiennik do odróżniającego lustra. Wielomianu F Kauffmana nie należy mylić z klamrą Kauffmana $\langle \ldots \rangle$!

Definicja 5.5.1 — wielomian Kauffmana. Niech L będzie zorientowanym splotem, zaś D ustalonym diagramem o spinie wr D. Istnieje wielomian $\Lambda(L)$ wyznaczony przez relację kłębiastą (z oznaczeniami jak na stronie 78)

$$\Lambda(L_+) + \Lambda(L_-) = z \cdot (\Lambda(L_0) + \Lambda(L_\infty)), \tag{5.108}$$

który jest niezmienniczy względem II i III ruchu Reidemeistera, spełnia równości:

$$\frac{1}{a}\Lambda\left(\right) = \Lambda\left(\right) = a\Lambda\left(\right) \tag{5.109}$$

oraz warunek brzegowy $\Lambda(\bigcirc) = 1$. Wtedy wielomian dwóch zmiennych

$$F_L(a, z) = a^{-\operatorname{wr} D}\Lambda(D), \tag{5.110}$$

nazywamy wielomianem Kauffmana. Jest niezmiennikiem splotów.

Jego związki z wielomianem HOMFLY pozostają nieznane. Wiemy natomiast, że

Fakt 5.5.2 Wielomian BLM/Ho jest szczególnym przypadkiem wielomianu Kauffmana, mamy równość

$$Q(x) = F(1, x). \tag{5.111}$$

Fakt 5.5.3 Wielomian Jonesa jest szczególnym przypadkiem wielomianu Kauffmana, mamy równość

$$V(t) = F(-t^{-3/4}, t^{-1/4} + t^{1/4}). \tag{5.112}$$

Rozpatrzmy relację kłębiastą $\Lambda_+ - \Lambda_- = x(\Lambda_0 - \Lambda_\infty)$. Prowadzi ona do wielomianu „z Dubrownika": Kauffman na pocztówce napisanej do Lickorisha z Dubrownika w 1985 roku opisał ten wielomian sądząc, że jest to nowy, niezależny od F niezmiennik.

5.6 Niezmienniki Wasiljewa

Niezmienniki Wasiljewa (znane także jako niezmienniki skończonego typu) umożliwiają radykalnie nowe podejście do węzłów. Około 1989 roku odkryli je niezależnie Wiktor Wasiljew, w oparciu o teorię osobliwości, oraz Michaił Gusarow, metodami kombinatorycznymi. My przedstawimy to drugie podejście. Niezmienniki Wasiljewa najlepiej zrozumieć, jeśli osłabimy trochę definicję węzła i będziemy rozważać także krzywe z samoprzecięciami.

Uważamy, że przyjemnym wprowadzeniem do niezmienników Wasiljewa jest artykuł [81] Czmutowa. Za najlepsze uważa się pracę [22]: Bar-Natan, jej autor, pozostaje do dziś jedną z najważniejszych osób dla rozwoju tego działu matematyki. Oprócz tego jest jeszcze pięknie zilustrowana książka [87] dwóch rosyjskich i jednego nierosyjskiego matematyka, będąca obszernym kompendium wiedzy o węzłach osobliwych.

Szkielet sekcji oparliśmy o piętnasty rozdział podręcznika Murasugiego, [328].

Definicja 5.6.1 — węzeł osobliwy. Niech $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ będzie kawałkami liniową funkcją, która jest różnowartościowa poza skończenie wieloma punktami. Załóżmy dodatkowo, że

- włókna – przeciwobrazy punktów – funkcji f są co najwyżej dwuelementowe;

- jeżeli dwa różne punkty mają ten sam obraz, to węzeł $K = f(S^1)$ przecina się tam pod kątem prostym.

Obraz funkcji f nazywamy węzłem osobliwym.

Gdy używamy słowa węzeł, nigdy nie mamy na myśli węzła osobliwego. Punkt, gdzie węzeł osobliwy tnie samego siebie, nazywamy wierzchołkiem i oznaczamy pogrubioną kropką:



Rysunek 5.4: Diagram totalnie przypadkowego węzła z jednym osobliwym skrzyżowaniem

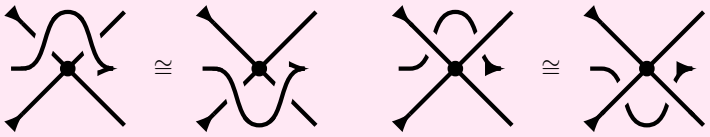
Odpowiednikiem definicji 1.1.8 dla węzłów osobliwych jest

Definicja 5.6.2 — płaski dysk. Niech A będzie wierzchołkiem węzła osobliwego K, B_A jego małym domkniętym otoczeniem, zaś P_A płaszczyzną, która zawiera $B_A \cap K$, mały fragment węzła wokół wierzchołka. Dysk $P_A \cap B_A$ nazywamy płaskim dyskiem wokół wierzchołka A.

Definicja 5.6.3 Dwa osobliwe węzły K, L są równoważne, co zapisujemy jako $K = L$, jeśli istnieje zachowujący orientację homeomorfizm φ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w siebie, który przenosi jeden węzeł na drugi: $\varphi(K) = L$ oraz indukuje bijekcję między rodzinami płaskich dysków K i L.

Ten drugi warunek gwarantuje nam, że skrzyżowania wokół podwójnych punktów nie ulegną zniszczeniu. Mamy też osobliwe twierdzenie Reidemeistera:

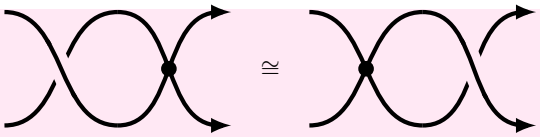
Fakt 5.6.4 Dwa osobliwe diagramy są równoważne dokładnie wtedy, kiedy można między nimi przejść przy użyciu ciągu izotopii otaczających, ruchów Reidemeistera, operacji Ω_4 oraz Ω_5.



(a) ruch Ω_{4a} (b) ruch Ω_{4e}

Rysunek 5.5: Dwa osobliwe warianty III ruchu Reidemeistera

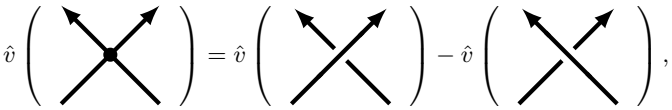
(Ciąg dalszy z poprzedniej strony)



Rysunek 5.6: Osobliwy wariant ruchu flype, Ω_5

Uwaga: ufamy pracy Nelsona, Oyamaguchiego, Sazdanovic [338] gdzie pokazano, że ten zestaw ruchów jest minimalny. Natomiast Murasugi podaje tylko jedną nową operację, wydaje nam się, że wszyscy nie mogą mieć jednocześnie racji.

Załóżmy teraz, że mamy jakiś niezmiennik węzłów v o wymiernych wartościach i chcemy przedłużyć go do niezmiennika $\hat{v}$ węzłów osobliwych. Najprościej zrobić to rekurencyjnie. Niech $\hat{v}$ będzie już określony dla osobliwych węzłów o co najwyżej $n-1$ wierzchołkach i wybierzmy dowolny węzeł i diagram o n wierzchołkach. Okazuje się, że jeżeli położymy



(5.113)

to dostaniemy dobrze określoną funkcję: jeżeli $L = K$ jest tym samym osobliwym węzłem z innym diagramem, to $\hat{v}(L) = \hat{v}(K)$. Funkcję $\hat{v}$ nazywamy niezmiennikiem osobliwym indukowanym przez niezmiennik węzłów v.

Definicja 5.6.5 — rząd niezmiennika. Niech v będzie niezmiennikiem osobliwym, zaś n liczbą naturalną. Mówimy, że v jest niezmiennikiem Wasiljewa rzędu co najwyżej n, jeśli dla dowolnego osobliwego węzła K o $n+1$ wierzchołkach zachodzi $v(K) = 0$. Jeśli dodatkowo v nie jest rzędu co najwyżej $n-1$, to mówimy, że jest rzędu dokładnie n.

5.6.1 Niezmienniki Wasiljewa małych rzędów

Pokażemy najpierw, jakie są niezmienniki Wasiljewa rzędów od 0 do 3.

Fakt 5.6.6 Każdy niezmiennik Wasiljewa rzędu 0 jest funkcją stałą.

Dowód. Niech v będzie niezmiennikiem rzędu zero, który znika na każdym osobliwym węźle o jednym wierzchołku. Relacja kłębiasta mówi, że $v(\times) = v(\times)$, to znaczy odwrócenie dowolnego skrzyżowania nie zmienia wartości niezmiennika.

Z lematu 3.2.2 wiemy jednak, że każdy węzeł można zmienić w niewęzeł odwracając niektóre skrzyżowania. Wynika stąd, że $v(K) = v(\bigcirc)$ dla każdego osobliwego węzła K, co należało udowodnić. ∎

Każda zespolona krotność niezmiennika Wasiljewa znowu jest takim niezmiennikiem. Niezmienniki rzędu zero tworzą przestrzeń liniową wymiaru 1 nad ciałem $\mathbb{C}$, zatem możemy krótko (choć nie dokładnie) powiedzieć, że jest jeden niezmiennik rzędu zero.

Fakt 5.6.7 Nie istnieje niezmiennik Wasiljewa rzędu 1.

Fakt 5.6.8 Istnieje dokładnie jeden niezmiennik Wasiljewa rzędów 2 i 3.

Dowód. Murasugi [328, s. 315-320] używa diagramów cięciw, wprowadzimy je później. ■

Czas na garść przykładów niezmienników skończonego typu oraz niezmienników, które nie są skończonego typu.

5.6.2 Niezmienniki, które są skończonego typu

Polyak, Viro [362] piszą, że jedyny niezmiennik Wasiljewa rzędu 2 to

$$v_2 = \frac{1}{2}\Delta''(1) \tag{5.114}$$

i że występuje pod nazwą „niezmiennik węzłów Cassona". Modulo 2 to niezmiennik Arfa.

■ **Przykład 5.6.9** Niech K będzie węzłem, zaś $\nabla_K(t) = \sum_k \nabla_{2k} z^{2k}$ jego wielomianem Conwaya. Współczynnik ∇_{2k} indukuje niezmiennik Wasiljewa rzędu dokładnie $2k$. ■

Dowód. Czmutow [81] porównał ze sobą relację kłębiastą dla wielomianu Conwaya oraz dla niezmienników Wasiljewa. Wynika z tego, że wielomian Conwaya osobliwego węzła, który ma m punktów podwójnych, musi być podzielny przez z^m, zatem c_{2k} jest niezmiennikiem rzędu co najwyżej $2k$. To było proste.

Nieproste jest pokazanie, dlaczego rząd tego niezmiennika wynosi dokładnie $2k$. Dokonał tego Bar-Natan [21] jeszcze w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku. ■

Lin oraz Wang [268] w 1994 roku na podstawie niezmienników małych rzędów, to jest v_2 oraz v_3, brawurowo wysunęli hipotezę: istnieje uniwersalna stała C taka, że

$$|v_k(K)| \leqslant C(\operatorname{cr} K)^k. \tag{5.115}$$

Hipotezę wkrótce udowodniono, najpierw dla węzłów (Bar-Natan [23]), nieco później także dla splotów (Stojmenow [416]). Wartość stałej C trudno obliczyć, dlatego Stojmenow [344, problem 1.17] zaproponował ograniczenie się do przypadku $v_k = \nabla_k$.

Hipoteza 5.6.10. *Niech L będzie splotem. Wtedy*

$$|\nabla_k(L)| \leqslant \frac{(\operatorname{cr} L)^k}{2^k k!}. \tag{5.116}$$

Nierówność jest nietrywialna tylko dla splotu L z $k+1, k-1, \ldots$ składowymi; trywialna dla $k = 0$, łatwa dla $k = 1$ (wtedy ∇_1 jest indeksem zaczepienia splotów o dwóch składowych) oraz udowodniona dla węzłów i $k = 2$ przez Polyaka, Viro [362] na początku wieku.

■ **Przykład 5.6.11** Niech K będzie węzłem, zaś $V_K(t)$ jego wielomianem Jonesa. Podstawmy

$$t := e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots, \tag{5.117}$$

a następnie rozwińmy wynik w szereg Taylora:

$$V_K(e^x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k. \tag{5.118}$$

Współczynnik b_k indukuje niezmiennik Wasiljewa rzędu co najwyżej k. ■

Ten i podobne wyniki dla wielomianów HOMFLY, Kauffmana uzyskała Birman z Linem [34], gdzie znacznie uprościli oryginalne techniki Wasiljewa. Patrz też [81, s. 56].

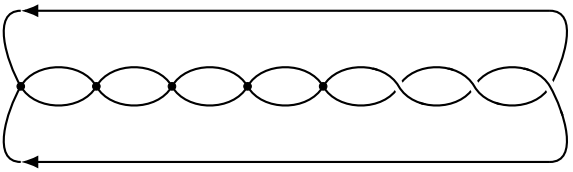
■ **Przykład 5.6.12 — s. 311 w [328].** Niech K będzie węzłem, zaś $f(t)$ rozwinięciem Taylora wielomianu Jonesa $V_K(t)$ w punkcie $t = 1$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-1)^k. \tag{5.119}$$

Współczynnik c_k indukuje niezmiennik Wasiljewa rzędu co najwyżej k. ■

5.6.3 Niezmienniki, które nie są skończonego typu

Pójdźmy teraz w ślad za Murasugim i zdefiniujmy nieskończoną rodzinę węzłów osobliwych $K[p, q]$, gdzie p jest liczbą wierzchołków singularnych, zaś $|q|$ liczbą klasycznych skrzyżowań. Jeśli $q < 0$, wszystkie klasyczne skrzyżowania odwracamy:



Rysunek 5.7: Węzeł osobliwy $K[p, q]$ dla $p = 5, q = +3$.

Fakt 5.6.13 Następujące funkcje: indeks skrzyżowaniowy cr, liczba gordyjska u, liczba mostowa br, indeks warkoczowy b, genus g, sygnatura σ nie są niezmiennikami Wasiljewa.

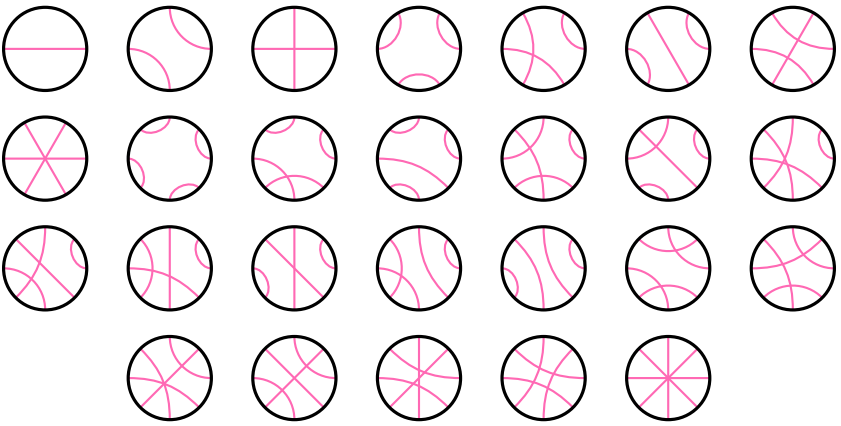
Wynik był znany już w latach 90., na przykład Birman, Lin [34] pokazali, że liczba gordyjska nie jest niezmiennikiem Wasiljewa.

Dowód. Dowód dla sygnatury jest w podręczniku Murasugiego [328, s. 312]. Natomiast żaden z pozostałych niezmienników nie znika na osobliwym węźle $K[n + 1, n]$ (ćwiczenie). ■

5.6.4 Diagramy cięciw, układy ciężarów, algebra chińskich znaków

Okazuje się, że wartość niezmiennika Wasiljewa v nie zależy wprost od tego, jak zaplątany jest węzeł osobliwy K, ale od tego, jak ułożone są wierzchołki wzdłuż węzła. Standardową metodą kodowania tej informacji jest diagram cięciw.

Definicja 5.6.14 — diagram cięciw. Zorientowany okrąg razem z $2n$ punktami leżącymi na nim (oraz połączonymi w pary) nazywamy diagramem cięciw rzędu n, albo stopnia n. Dwa homeomorficzne z zachowaniem orientacji diagramy uznajemy za takie same.



Rysunek 5.8: Wszystkie dwadzieścia sześć diagramów cięciw stopnia 1, 2, 3, 4

Jak zamienić węzeł osobliwy w diagram cięciw? Wybierzmy dowolny punkt na węźle, różny od wierzchołka i przemierzmy węzeł. Mijanym skrzyżowaniom przypiszmy liczby $1, 2, \ldots, 2n$. Następnie na okręgu zaznaczmy kolejno te same punkty $1, 2, \ldots 2n$. Wreszcie połączmy ze sobą liczby, które występują na tych samych skrzyżowaniach.

Fakt 5.6.15 Niech K_1, K_2 będą dwoma osobliwymi węzłami o tym samym diagramie cięciw, zaś v niezmiennikiem Wasiljewa. Wtedy $v(K_1) = v(K_2)$.

Dowód. Umieśćmy węzły osobliwe K_1, K_2 w przestrzeni tak, by ich wierzchołki oraz obie gałęzie wychodzące z wierzchołków leżały tak samo. Wtedy można tak zdeformować łuki K_1, by jedynymi osobliwościami, jakie się pojawią lub znikną, były podwójne punkty. Teraz relacja kłębiasta Wasiljewa mówi, że wartość v nie zmienia się podczas tego procesu, zatem $v(K_1) = v(K_2)$, co należało okazać. ■

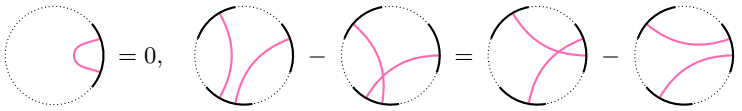
Definicja 5.6.16 — symbol niezmiennika. Niech v będzie niezmiennikiem Wasiljewa. Obcięcie v do zbioru węzłów osobliwych o dokładnie n wierzchołkach traktowane jako funkcja ze zbioru diagramów cięciw nazywamy symbolem tego niezmiennika.

Jeśli v_1, v_2 są niezmiennikami Wasiljewa rzędu co najwyżej n o tych samych symbolach, to ich różnica jest niezmiennikiem rzędu co najwyżej $n-1$. Oznacza to, że przestrzeń $\mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$ pokrywa się z przestrzenią wszystkich symboli niezmienników Wasiljewa rzędu co najwyżej n. Zbiór diagramów cięciw rzędu n jest skończony, więc przestrzeń funkcji na tym zbiorze też jest skończona, a zatem przestrzenie $\mathcal{V}_n$ są skończonego wymiaru.

Stojmenow w [416] znalazł jakościowy wynik bez praktycznego znaczenia (ponieważ już dla $k = 4$ musielibyśmy znać wszystkie węzły o 36 skrzyżowaniach, a tych jest tak dużo, że prędzej skonamy niż poznamy pełną ich listę). Dokładniej:

Fakt 5.6.17 Każdy niezmiennik Wasiljewa rzędu k jest jednoznacznie określony przez wartości, jakie przyjmuje na alternujących węzłach o co najwyżej $2k^2 + k$ skrzyżowaniach.

Symbol nie jest byle jaką funkcją, spełnia dwie relacje:



Rysunek 5.9: Relacje „one-term" (1T) i „four-term" (4T)

Diagramy mogą mieć więcej cięciw z końcami tam, gdzie linia jest kropkowana, natomiast wszystkie końce cięciw na czarnych, pogrubionych łukach zostały zaznaczone explicite.

Zastosowaliśmy tutaj mały skrót dla oszczędności miejsca: oczywiście nie umiemy jeszcze odejmować od siebie diagramów, dlatego powyższe relacje należy rozumieć tak, że na każdym diagramie liczymy symbol niezmiennika i porównujemy tak otrzymane liczby zespolone.

■ **Przykład 5.6.18** Mamy:



(5.120)

(na mocy relacji 1T i 4T). ■

Definicja 5.6.19 — układ ciężarów. Funkcję określoną na zbiorze diagramów n cięciw, która spełnia relacje 1T oraz 4T, nazywamy układem ciężarów.

Okazuje się, że wszystkie zależności, jakie występują między niezmiennikami Wasiljewa, są konsekwencjami relacji 1T oraz 4T. Mówi o tym głębokie twierdzenie Koncewicza:

Fakt 5.6.20 Każdy układ ciężarów jest symbolem pewnego niezmiennika Wasiljewa.

Dowód. Koncewicz w [240]. ■

Z tego, co napisaliśmy wyżej wynika, że wszystkie informacje o niezmienniku Wasiljewa można zakodować w postaci tak zwanej „tablicy rzeczywistości". Dla każdego diagramu cięciw wybiera się reprezentanta, węzeł osobliwy, oraz podaje wartość niezmiennika na tym węźle. Jest to pięknie zilustrowane w [87, sekcja 3.7].

Definicja 5.6.21 — chiński znak. Spójny graf złożony z pojedynczego zorientowanego okręgu oraz pewnej liczby niezorientowanych, kreskowanych linii, które mogą się spotykać w jednym z dwóch typów wierzchołków:

- wewnętrznych wierzchołkach, gdzie spotykają się trzy kreskowane linie;
- zewnętrznych wierzchołkach, gdzie kreskowane linie kończą się na okręgu.

Wierzchołki wewnętrzne są zorientowane w lewo lub prawo.

Diagramy cięciw modulo relacja 4T jest tym samym, co algebra chińskich znaków modulo relacja STU. W tej drugiej spełnione są jeszcze relacje AS oraz IHX, nie mamy siły tego rysować, ale wszystko można znaleźć w pracy Bar-Natana [22].

5.6.5 Niezmienniki Wasiljewa wyższych rzędów

(Na podstawie początku pracy Czmutowa [81]). Niech $\mathcal{V}_n$ będzie zbiorem niezmienników Wasiljewa rzędu co najwyżej n, o wartościach w zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Z definicji 5.6.5 wynika, że $\mathcal{V}_n$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$ oraz $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}_{n+1}$ i mamy rosnącą filtrację

$$\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{V} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n. \tag{5.121}$$

Oznaczmy wymiar przestrzeni $\mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$ przez d_n. Dla wyższych rzędów nie dość, że nie znamy dokładnych wartości ciągu d_n, to dolne i górne ograniczenia asymptotyczne są od siebie bardzo różne: górne jest niemalże silnią, dolne natomiast jest podwykładnicze.

Fakt 5.6.22 $d_n < (2n-1)!!$.

Dowód. Na tyle sposobów można narysować n cięciw wewnątrz okręgu. ■

Fakt 5.6.23 $d_n < (n-1)!$.

Dowód. Czmutow, Dużin [82] zauważają, że jeśli Δ_n oznacza przestrzeń generowaną przez wszystkie diagramy cięciw modulo relacje 1T i 4T, to $\dim \mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1} \leqslant \dim \Delta_n$. Wprowadzają diagramy z kręgosłupem: cięciwą, która tnie wszystkie inne cięciwy, po czym pokazują, że każdy diagram jest równoważny diagramowi z kręgosłupem. ■

Fakt 5.6.24 $d_n < \frac{1}{2}(n-2)!$.

Niedowód. Ng [341] jako produkt uboczny: klasy abstrakcji węzłów, które nie są odróżnialne niezmiennikami Wasiljewa rzędu co najwyżej n tworzą wolną grupę abelową, zawiera ona pewną podgrupę węzłów taśmowych indeksu 2. ■

Fakt 5.6.25 Ciąg d_n rośnie wolniej niż $n! \cdot 1.1^n$.

Niedowód. Stojmenow [414]. ■

Fakt 5.6.26 $d_n \lesssim n!/(2\log 2 + O(1))^n$.

Niedowód. Bollobás, Riordan [41] korzystają z technik i nomenklatury Stojmenowa. ■

Fakt 5.6.27 Niech $a < \frac{1}{6}\pi^2$ będzie stałą. Wtedy

$$\dim \frac{\mathcal{V}_n}{\mathcal{V}_{n-1}} \lesssim \frac{n!}{a^n}. \tag{5.122}$$

Dowód. Zagier [473] znalazł to ograniczenie przy użyciu szeregów Dirichleta: zauważył, że liczba diagramów cięciwowych występuje jako współczynnik w asymptotycznym rozwinięciu wokół $q = 1$ funkcji

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-q) \cdot (1-q^2) \cdot \ldots \cdot (1-q^n), \tag{5.123}$$

która jest radialną granicą pochodnej rzędu pół, co jakoś (?!) sugeruje związki z teorią całek Eichlera form modularnych. ■

Zanim przejdziemy do ograniczeń z dołu, zdefinujmy jeszcze jedną przestrzeń, $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{V}_n$. Składa się z tych niezmienników Wasiljewa, które są jednocześnie morfizmami, to znaczy spełniają równość $v(K_1 \# K_2) = v(K_1) + v(K_2)$. Każdy niezmiennik jest wielomianową kombinacją niezmienników pierwotnych (elementów $\mathcal{P}_n$).

Fakt 5.6.28 $\dim \mathcal{P}_n \geqslant 1$.

Niedowód. Czmutow, Dużin, Lando [86]. ■

Fakt 5.6.29 $\dim \mathcal{P}_n \geqslant [n/2]$.

Niedowód. Melvin, Morton [293], Czmutow, Warczenko [88]. ■

Fakt 5.6.30 $\dim \mathcal{P}_n \gtrsim \frac{1}{96} n^2$.

Niedowód. Czmutow [80]. ■

Fakt 5.6.31 $\dim \mathcal{P}_n \gtrsim n^{\log_b n}$ dla $b > 4$.

Niedowód. Czmutow, Dużin [83]. ■

Fakt 5.6.32 $\dim \mathcal{P}_n \gtrsim \exp(\pi\sqrt{n/3})$.

Niedowód. Koncewicz w faksie do Czmutowa z 1997 roku. :) ■

Fakt 5.6.33 $\dim \mathcal{P}_n \gtrsim \exp(c\sqrt{n})$ dla każdej stałej $c < \pi\sqrt{2/3}$.

Niedowód. Zrazu Czmutow, Dużin [83, s. 202] zauważyli, że Koncewicz pierwszy podał ten wynik i przytoczył ćwiczenie ze starego preprintu Bar-Natana, który później zmienił treść ćwiczenia i przytoczył prywatną korespondencję z Koncewiczem. Być może oszacowanie było prawdziwe, ale nikt nie miał jego dowodu.

Z gmatwaniną poradził sobie wkrótce Dasbach [106]. Pracował z algebrą skończonych grafów, których wierzchołki są stopnia 1 lub 3, modulo relacje IHX i antysymetrii. Pojawiają się też układy ciężarów pochodzące od algebry Liego $\mathfrak{gl}(N)$, dzięki którym można użyć pewnych dobrze znanych wyników z teorii liczb i teorii algebr Liego. Praca [106] ma tylko 11 stron, ale jest zamknięta w sobie i (zdaniem Birman) przykładem czytelności. ■

Ograniczenie Dasbacha pozostaje najlepsze (stan na 2011 rok).

Wniosek 5.6.34 Niech $a < \frac{1}{6}\pi^2$ będzie stałą. Wtedy

$$\exp\left(\frac{n}{\log_a n}\right) \lesssim \dim \mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}. \tag{5.124}$$

Niedowód. Dasbach w [106]. ■

Dokładny wymiar przestrzeni $\mathcal{V}_n$ jest znany tylko dla $n \leqslant 12$. Poniższa tabela ma dość ciekawą historię. Wasiljew znalazł ręcznie wartości w kolumnach dla $n \leqslant 4$ w 1990 roku. Potem Bar-Natan napisał komputerowy program rozwiazujący pewne równania liniowe i znalazł tak wymiary przestrzeni $\mathcal{V}_n$ dla $n \leqslant 9$, miało to miejsce w roku 1993. Wreszcie Kneissler [229] cztery lata później znalazł dolne oraz górne ograniczenia: dolne oparte o znaczone powierzchnie, górne pochodzące od algebry Vogela. Dla $n \leqslant 12$ ograniczenia te pokrywają się! Mniej więcej w tym samym czasie Broadhurst [55] przypuszczał, że środkowy wiersz tabeli można kontynuować: 932, 1 591, 2 686, 4 537, 7 602, i tak dalej. Ale pomimo upływu ponad ćwierć wieku, dowodu wciąż nie ma.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim \mathcal{V}_n$	1	1	2	3	6	10	19	33	60	104	184	316	548
$\dim \mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$	1	0	1	1	3	4	9	14	27	44	80	132	232

5.6.6 Całka Koncewicza

Żaden niezmiennik Wasiljewa nie jest zupełny:

Fakt 5.6.35 Dla każdej liczby naturalnej n i niezmiennika Wasiljewa v rzędu n, istnieją różne od siebie węzły $K_1 \neq K_2$ takie, że $v(K_1) = v(K_2)$.

Dowód. W pracy Ohyamy [346]. Dla każdego węzła K wskazano tam nieskończoną rodzinę złożonych węzłów (K_n), których niezmienniki rzędu co najwyżej n nie odróżniają od K. ■

Jak można przeczytać w recenzji na portalu MathSciNet, Ohyama był świadomy istnienia preprintu Stanforda, wydanego później jako [412]: dowodzi się tam, że dla każdego splotu L istnieje nieskończona rodzina pierwszych, nierozszczepialnych, alternujących splotów nieodróżnialnych takimi niezmiennikami.

Z drugiej strony, Czmutow i inni piszą w [87], że sześć niezmienników rzędu co najwyżej 4 wystarcza do odróżnienia dowolnych dwóch węzłów pierwszych do 8 skrzyżowań. Kneissler twierdzi ([229, wniosek 2.5]), że niezmienniki rzędu co najwyżej 12 nie odróżniają węzłów od ich odwrotności.

W 1993 roku Maxim Koncewicz pokazał, że dla każdego węzła można policzyć pewną całkę (teraz nazywaną całką Koncewicza), która jest niezmiennikiem uniwersalnym: z jej wartości można odtworzyć wszystkie inne niezmienniki skończonego typu. Bar-Natan w 1995 roku znalazł wartość tej całki dla niewęzła:

$$I(\bigcirc) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} w_{2n}\right), \tag{5.125}$$

gdzie b_{2n} to zmodyfikowane liczby Bernoulliego o funkcji tworzącej

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} x^{2n} = \frac{1}{2} \log \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{x/2}, \tag{5.126}$$

zaś w_{2n} to „koła": diagramy okręgu z doczepionymi $2n$ promieniami. Liniową kombinację należy rozumieć jako element algebry chińskich znaków. Następnie Marché w 2003 roku znalazł wartości całki dla węzłów torusowych ([288]). Wygląda na to, że nikt nie odważył się dokonać tego dla innych węzłów (stan na 2019).

Hipoteza 5.6.36. *Całka Koncewicza jest zupełnym niezmiennikiem węzłów.*

Całka Koncewicza jest mocniejsza od każdego wielomianowego niezmiennika, jaki dotąd poznaliśmy, a nie wiemy nawet, czy wielomian Jonesa wykrywa niewęzły (hipoteza 5.2.11). Czmutow, Dużin wspominają w dość czytelnie napisanym artykule [84], że hipoteza 5.6.36 jest prawdziwa dla warkoczy (Kohno [237]) i splotów sznurkowych (Bar-Natan [24]).

Zbiór problemów Ohtsukiego [344, s. 398-444] poświęca wiele stron na niezmienniki skończonego typu oraz całkę Koncewicza.

6. Topologia algebraiczna

Powoli kończymy definiować niezmienniki węzłów, po tym rozdziale brakować będzie tylko liczby warkoczowej. Zaczniemy od opisu grupy podstawowej dopełnienia węzła oraz prezentacji tej grupy znalezionej przez Wirtingera. Następnie pokażemy, że każdy węzeł jest brzegiem pewnej zorientowanej powierzchni (zwanej powierzchnią Seiferta) i odkryjemy tak źródło kolejnych niezmienników: genusu, wyznacznika, sygnatury. Nie do końca wiadomo dlaczego, ale wspomnimy krótko o niezmienniku Arfa. Na koniec spróbujemy przekonać czytelnika, że najciekawszą teorią homologii dla węzłów są homologie Chowanowa.

6.1 Grupa węzła

Ponieważ dopełnienie dowolnego węzła, zarówno w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jak i S^3, jest łukowo spójne, jego grupa podstawowa nie zależy od wyboru punktu bazowego. Dzięki temu poniższa definicja ma sens:

Definicja 6.1.1 — grupa węzła. Niech K będzie węzłem. Wtedy grupę podstawową jego dopełnienia,

$$\pi(K) := \pi_1\left(\mathbb{R}^3 \setminus K\right), \tag{6.1}$$

nazywamy grupą węzła i oznaczamy $\pi(K)$.

Nie należy (i dosyć trudno jest) mylić grupy węzła z grupą kolorującą (patrz definicja 4.4.1). Grupa kolorująca jest skończona dla splotów o niezerowym wyznaczniku i zawsze przemienna, natomiast, jak wkrótce się przekonamy, grupa podstawowa jest zawsze nieskończona i poza grupą niewęzła, nieprzemienna.

Podamy najpierw kilka przykładów węzłów oraz ich grup.

■ **Przykład 6.1.2** Grupa niewęzła $\pi(\bigcirc) = \mathbb{Z}$. ■

Z twierdzenia o pętli, czyli uogólnienia lematu Dehna wynika, że niewęzeł jest jedynym węzłem, którego grupą podstawową jest $\mathbb{Z}$. (Pierwszy dowód lematu Dehna podał Max Dehn w 1910 roku, ale Hellmuth Kneser znalazł w 1929 lukę w dowodzie. Z odsieczą przyszedł matematyk grecki Christos Papakyriakopoulos, który około 1957 roku nie tylko podał poprawny dowód używając „konstrukcji wieżowej", ale uogólnił go do twierdzenia o pętli, o sferze).

■ **Przykład 6.1.3** Grupa trójlistnika $\pi(3_1) = \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$. ■

Dowód. Wynika to z prezentacji Wirtingera i transformacji Tietzego:

$$\begin{aligned}
\pi_1(S^3 \setminus 3_1) &= \langle x, y, z \mid xz = yx, zy = xz, yx = zy \rangle && (6.2)\\
&= \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle && (6.3)\\
&= \langle x, y, a, b \mid xyx = yxy, a = yx, b = xyx \rangle && (6.4)\\
&= \langle x, a, b \mid xa = a^2 x^{-1}, b = xa \rangle && (6.5)\\
&= \langle a, b \mid b = a^2 (ba^{-1})^{-1} \rangle && (6.6)\\
&= \langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle. && \blacksquare
\end{aligned}$$

Trójlistnik jest węzłem $(3, 2)$-torusowym, więc powyższy przykład stanowi szczególny przypadek grupy węzła torusowego. Jej wyznaczenie to popularne ćwiczenie w podręcznikach topologii algebraicznej:

■ **Przykład 6.1.4** Grupa węzła (p, q)-torusowego: $\langle x, y \mid x^p = y^q \rangle$. ■

Dowód. Wniosek z twierdzenia Seiferta-van Kampena, więcej szczegółów u Kawauchiego [219, s. 77] albo Burdego, Zieschanga, Heusenera [64, s. 49] albo Hatchera [182, s. 47]. ■

■ **Przykład 6.1.5** Grupa ósemki $\pi(4_1) = \langle x, y \mid yxy^{-1}xy = xyx^{-1}yx \rangle$. ■

Fakt 6.1.6 Grupa jest niezmiennikiem węzłów.

Dowód. Ustalmy dwa równoważne węzły $K_1 \equiv K_2$. Wtedy istnieje pewien homeomorfizm $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, który posyła pierwszy węzeł na drugi: $f[K_1] = K_2$. Obcięcie f do dopełnień węzłów indukuje izomorfizm grup podstawowych $\pi(K_1) \cong \pi(K_2)$. ■

Sumy proste przeciwnie oraz tak samo skrętnych trójlistników mają różne sygnatury (patrz uwaga za wnioskiem 6.2.48), więc nie są równoważne. Ale obydwie sumy mają tę samą grupę podstawową $\langle x, y, z \mid xyx = yxy, xzx = zxz \rangle$.

Prawdziwe jest nawet ogólniejsze stwierdzenie:

Fakt 6.1.7 Niech K_1, K_2 będą zorientowanymi węzłami. Wtedy istnieje izomorfizm

$$\pi(K_1 \# K_2) \to \pi(K_1 \# \operatorname{mr} K_2). \tag{6.7}$$

Niedowód. Wniosek z twierdzeń o podgrupie południkowo-równoleżnikowej [219, s. 75]. ■

Twierdzenie odwrotne do faktu 6.1.6 jest prawdziwe w klasie węzłów pierwszych:

Fakt 6.1.8 Niech K_1, K_2 będą węzłami pierwszymi. Jeżeli grupy $\pi(K_1) \cong \pi(K_2)$ są izomorficzne, to węzły $K_1 \equiv K_2$ są równoważne.

„The group of a prime knot does not, however, necessarily determine the topological type of the exterior. Dehn flips on certain "essential" solid tori in the exteriors of torus knots and of cable knots produce Haken manifolds that are homotopically equivalent but not homeomorphic to the original exteriors and that, in fact, cannot be imbedded in S^3" (Whitten, [468]).

Dowód. Whitten [468] pokazał, że węzły o izomorficznych grupach mają homeomorficzne dopełnienia. Wkrótce po tym Gordon, Luecke [170] udowodnili, że nietrywialna chirurgia Dehna na nietrywialnym węźle nigdy nie daje sfery S^3, a stąd wynika, że każdy homeomorfizm dopełnień węzłów można przedłużyć do homeomorfizmu S^3 w siebie posyłającego jeden węzeł na drugi jako zbiory. ■

Waldhausen [460] pokazał dla pewnej dużej klasy 3-rozmaitości, że są scharakteryzowane topologicznie przez ich grupy podstawowe. Potem odkryto, że:

Fakt 6.1.9 Grupa węzła wyznacza wartość jego genusu.

Fakt 6.1.10 Grupa węzła złożonego wyznacza wartość jego liczby mostowej.

Niedowód. Dwa powyższe fakty są wnioskiem 3 z pracy Feustela [131]. ■

Thurston [435] uzyskał kolejny wynik o grupie jako efekt uboczny badania czegoś tam: hiperboliczne rozmaitości o skończonej objętości (domknięte rozmaitości lub takie, których brzeg jest zbudowany z torusów) są wyznaczone przez ich grupę podstawową.

6.1.1 Grupa splotu

Kawauchi [219, s. 73] i prawie cała reszta świata definiują grupę splotu jako grupę podstawową jego dopełnienia. Dla Milnora [296] grupą splotu był pewien iloraz[1] tamtej grupy, dlatego należy zachować ostrożność i sprawdzić, która konwencja obowiązuje. My przenigdy nie będziemy wykorzystywać podejścia Milnora.

■ **Przykład 6.1.11** Grupa splotu Hopfa: $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. ■

Kawauchi wspomina, że istnieją sploty, których grupa splotu nie odróżnia, podaje w formie ćwiczenia [219, s. 73], że grupa sumy niespójnej splotów L_1, L_2 to $\pi(L_1) * \pi(L_2)$ i przytacza twierdzenie:

Fakt 6.1.12 Niech $L \subseteq S^3$ będzie splotem, ale nie niewęzłem. Następujące warunki są równoważne:

1. splot L nie jest rozszczepialny,
2. dopełnienie $S^3 \setminus L$ jest rozmaitością Hakena o nieściśliwym brzegu,
3. grupa podstawowa splotu L jest nierozkładalna względem produktu wolnego.

Dowód. Z twierdzenia o pętli (niech M będzie spójną 3-rozmaitością o niepustym brzegu, zaś F powierzchnią na ∂M; jeżeli homomorfizm $\pi_1(F) \to \pi_1(M)$ indukowany przez inkluzję nie jest różnowartościowy, to istnieje dysk ściskający dla F w M) i sferze (niech M będzie spójną zorientowaną 3-rozmaitością, jeżeli $\pi_2(M)$ jest nietrywialna, to istnieje sfera właściwa w M) wynika, że $1 \implies 2$. Implikacja $2 \implies 3$ jest wnioskiem z hipotezy Knesera (niech

[1] Niech L będzie splotem w otwartej 3-rozmaitości M, $\pi(L)$ grupą podstawową dopełnienia L, zaś L^i splotem powstałym przez usunięcie i-tego ogniwa. Niech $A_i(L)$ oznacza jądro naturalnej inkluzji $\pi(L) \to \pi(L^i)$, zaś $[A_i]$ komutanta. Wtedy $E(L) := [A_1][A_2] \cdots [A_n]$ jest podgrupą normalną $\pi(L)$. Milnor nazywa iloraz $\pi(L)/E(L)$ grupą splotu.

M będzie zwartą, spójną 3-rozmaitością, której brzeg jest pusty lub złożony z nieściśliwych powierzchni; jeśli $\pi_1(M) \cong G_1 * G_2$, to istnieje rozkład M na sumę $M_1 \# M_2$ taką, że $\pi_1(M_i) \cong G_i$), zaś wynikanie $3 \implies 1$ jest oczywiste. To kończy dowód. ■

Wniosek 6.1.13 Niech $L \subseteq S^3$ będzie splotem. Następujące warunki są równoważne:

1. grupa podstawowa splotu L jest wolna, rangi n,
2. splot L jest trywialny, złożony z n ogniw.

Fakt 6.1.14 Niech $L \subseteq S^3$ będzie splotem. Następujące warunki są równoważne:

1. splot L jest prosty i niepierścieniowaty,
2. grupa $\pi(L)$ jest nieprzemienna, nierozkładalna względem produktu wolnego oraz izomorficzna z dyskretną podgrupą $PSL_2(\mathbb{C})$.

Dowód. Wniosek z twierdzenia Thurstona o hiperbolizacji, patrz [219, s. 76]. ■

Jak wspomina Kawauchi [219, s. 83], jeśli G jest nietrywialną przemienną podgrupą $\pi(L)$, to $G \cong \mathbb{Z}$ lub $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Wynika to z klasyfikacji abelowych grup podstawowych 3-rozmaitości. W szczególności, jeśli $\pi(L) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, to L jest splotem Hopfa.

Fakt 6.1.15 Niech L będzie splotem. Następujące warunki są równoważne:

1. centrum grupy $\pi(L)$ jest nietrywialne,
2. dopełnienie splotu $S^3 \setminus L$ jest rozmaitością Seiferta.

Wniosek 6.1.16 Niech K będzie węzłem. Następujące warunki są równoważne:

1. centrum grupy $\pi(K)$ jest nietrywialne,
2. węzeł K jest torusowy.

O tym samym, ale nie tak samo, napiszemy jeszcze raz w 7.5.6. Kawauchi [219, s. 85] mówi grupom splotów dobranoc:

Fakt 6.1.17 Grupa splotu jest lokalnie indeksowalna (dla każdej nietrywialnej skończenie generowanej podgrupy $H \leqslant \pi$, istnieje epimorfizm $H \to \mathbb{Z}$) i rezydualnie skończona (dla każdego nietrywialnego elementu $x \in \pi$, istnieje homomorfizm $f : \pi \to H$ taki, że grupa H jest skończona i $f(x) \neq 1$).

6.1.2 Prezentacja Wirtingera

Perko [357] pisze, że na wykładzie w 1905 roku (którego nigdy nie spisano) „Wirtinger otworzył drzwi do barwnego świata przestrzeni nakryciowych”[2], rozkładając dopełnienie węzła na

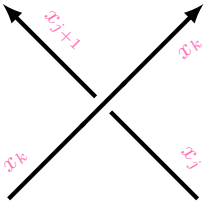
[2] *„I think covering spaces can be understood by fifth graders”* – Kenneth Perko tamże

komórki, co doprowadziło do prezentacji grupy podstawowej. Jest to skończona prezentacja, w której wszystkie relacje są postaci $wg_iw^{-1} = g_j$, gdzie w to pewne słowo na generatorach $g_1, \ldots, g_k$. Pokażemy zarys konstruktywnego algorytmu, który w wygodny sposób zamienia skrzyżowania diagramu w relacje.

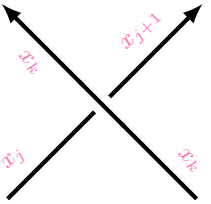
Patrz też [64, s. 32-39].

Fakt 6.1.18 Grupa każdego zorientowanego węzła posiada prezentację Wirtingera.

Dowód. Niech K będzie zorientowanym węzłem. Wybierzmy dowolny diagram, początkowy punkt na tym diagramie i przemierzajmy węzeł, nazywając kolejne włókna $x_1, x_2, \ldots x_n$. To będą generatory grupy. Do każdego skrzyżowania przypisujemy relację zgodnie z poniższymi regułami, w zależności od znaku skrzyżowania:



(a) skrzyżowanie dodatnie: $x_j = x_k x_{j+1} x_k^{-1}$



(b) skrzyżowanie ujemne: $x_j = x_k^{-1} x_{j+1} x_k$

Oto mnemotechnika ułatwiająca zapamiętywanie relacji. Wyobraźmy sobie zorientowaną przeciwnie do ruchu wskazówek zegara ścieżkę wokół skrzyżowania. Poruszamy się po niej i kiedy mijamy włókno biegnące do skrzyżowania, zapisujemy jego symbol, a kiedy włókno biegnie od skrzyżowania na zewnątrz, zapisujemy odwrotność jego symbolu. Tak uzyskane czteroliterowe słowo jest równe 1 w grupie węzła. ■

Porządny dowód znaleźliśmy w podręczniku Stillwella [413, s. 144-147]: używa twierdzenia Seiferta-van Kampena. Nie będziemy go przepisywać, ograniczymy się tylko do pożyczenia dwóch obrazków:

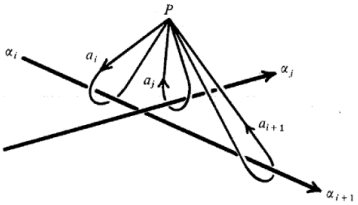


Figure 157

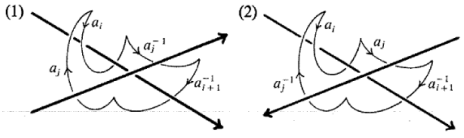


Figure 158

Rysunek 6.2: Kontrakcja krzywych do punktu

Wniosek 6.1.19 Niech G będzie grupą węzła. Wtedy jej abelianizacja jest nieskończoną grupą cykliczną: $G^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}$.

Jedna z relacji w prezentacji Wirtingera jest zbędna – wynika z pozostałych. Fakt ten zazwyczaj podaje się bez dowodu, dlatego warto wspomnieć, że nie zapomniał o nim Rolfsen [385, s. 56-60], za co serdecznie mu dziękujemy.

Dowód. Relacja $a_i a_j a_i^{-1} a_k^{-1} = 1$ po przejściu do abelianizacji przyjmuje postać $a_j = a_k$. Oznacza to, że etykieta łuku nie zmienia się podczas przejścia pod każdym skrzyżowaniem, zatem wszystkie etykiety są takie same.

Można też zauważyć, że abelianizacją grupy podstawowej węzła jest pierwsza grupa homologii okręgu, czyli $\mathbb{Z}$. ■

Michel Kervaire [220] pokazał, jakie własności musi posiadać grupa węzła (i wiemy o tym, bo przeczytaliśmy książkę Kawauchiego [219, tw. 14.1.1]):

Fakt 6.1.20 Niech G będzie grupą węzła $S^n \subseteq S^{n+2}$. Wtedy:

1. grupa G jest skończenie prezentowana,
2. abelianizacja G/G' jest nieskończoną grupą cykliczną,
3. druga grupa homologii $H_2(G) = 0$ jest trywialna,
4. istnieje element $x \in G$ zwany południkiem taki, że G jest najmniejszą podgrupą normalną G, która zawiera x.

Wyżej wymienione warunki konieczne są także wystarczające, jeżeli $n \geqslant 3$, jednakże problem pełnej charakteryzacji w czwartym wymiarze jest otwarty. Warunki 2. i 3. wynikają z dualności[3] Alexandera, zaś 1. i 4. stanowią przeformułowanie prezentacji Wirtingera.

Burde, Zieschang [64, s. 180] podają przykład, dlaczego dla $n = 2$ to nie jest wystarczające: dla grupy G generowanej przez x, y z relacją $x^2 y = yx$ jakobian nie jest symetryczny.

6.2 Powierzchnie i macierze Seiferta

W tej sekcji pogłębimy nasze rozumienie wielomianu Alexandera i odkryjemy jego powiązania z topologicznymi własnościami węzłów. Poznamy także zupełnie nowy sposób na wyznaczanie jego wartości, posłużą do tego powierzchnie oraz macierze Seiferta.

6.2.1 Powierzchnia Seiferta

Zaczniemy od przyjrzenia się powierzchniom. Niektóre stwierdzenia będziemy przyjmować bez dowodów, bo te są w dobrych podręcznikach topologii albo analizy na rozmaitościach.

Definicja 6.2.1 Dwuwymiarową rozmaitość topologiczną bez brzegu $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy powierzchnią.

Rozmaitość to obiekt, który wygląda lokalnie jak przestrzeń euklidesowa: każdy jej punkt $x \in M$ posiada otwarte otoczenie homeomorficzne z otwartą kulą. Przykładami powierzchni są sfera, brzeg torusa albo hiperboloida jednopowłokowa. Istnieje ogólniejsze pojęcie, to jest rozmaitość z brzegiem: każdy jej punkt posiada otoczenie homeomorficzne z otwartym podzbiorem górnej półpłaszczyzny $\{x \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(x) \geqslant 0\}$.

[3] Niech X będzie zwartą, lokalnie ściągalną podprzestrzenią sfery S^n. Wtedy $\tilde{H}_q(S^n \setminus X) \cong \tilde{H}^{n-q-1}(X)$. Założenie o lokalnej ściągalności można pominąć, jeśli pracuje się z kohomologią Čecha.

Powierzchnię nazywamy orientowalną, jeśli nie istnieje na niej zamknięta krzywa, podczas pokonywania której odwraca się kierownica. Orientowalne są dokładnie te powierzchnie, które nie zawierają w sobie kopii wstęgi Möbiusa.

Najważniejsze dla nas są powierzchnie Seiferta (opisane np. w [219, s. 46-72], [64, s. 19-21]).

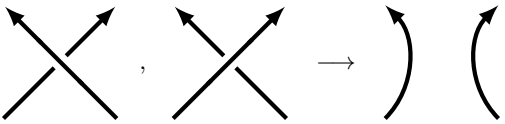
Definicja 6.2.2 — powierzchnia Seiferta. Niech L będzie splotem. Każdą spójną oraz orientowalną powierzchnię zanurzoną w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, której brzegiem jest splot L, nazywamy powierzchnią Seiferta splotu L.

Nie każde uszachowienie diagramu węzła prowadzi do powierzchni Seiferta: widać to po standardowym diagramie trójlistnika. Pomimo to...

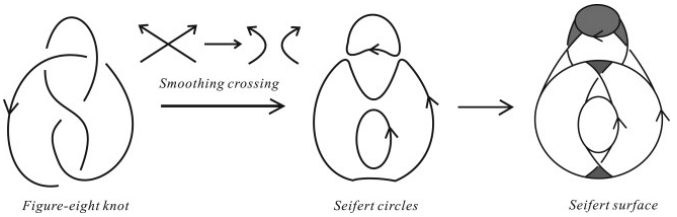
Fakt 6.2.3 Każdy splot posiada powierzchnię Seiferta.

Powyższe stwierdzenie uzasadnili Pontriagin oraz Frankl w 1930 roku, my jednak podamy przyjemny i konstruktywny dowód podany przez Seiferta [406] cztery lata później. (Piszą o tym na początku swojej monografii Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 19]).

Dowód. Wybierzmy diagram D dla splotu oraz orientację, a następnie wyprostujmy wszystkie skrzyżowania zgodnie z ich orientacją:



Otrzymany diagram składa się teraz z pewnej liczby zamkniętych krzywych, zwanych okręgami Seiferta, które wypełniamy do dysków. Tam, gdzie jeden okrąg leżał wewnątrz drugiego, podnosimy wewnętrzny nad zewnętrzny. Przy każdym skrzyżowaniu pierwotnego diagramu doklejamy skręcony pasek do obydwu dysków.



Rysunek 6.3: Kolejne kroki algorytmu Seiferta

Pozostało wskazać orientację dla tak otrzymanej powierzchni. Przypisujemy znak $+$ górnej stronie dysków, których brzeg jest zorientowany dodatnio (oraz dolnej stronie dysków, których brzeg jest zorientowany ujemnie). ■

Powierzchnia Seiferta jest wrażliwa na orientację ogniw splotu: odwrócenie niektórych, ale nie wszystkich, często prowadzi do innej powierzchni. Na przykład sygnatura splotu L4a1 może wynosić, w zależności od orientacji ogniw względem siebie, 1 lub -3.

6.2.2 Węzły rozwłóknione

Wspomnijmy jeszcze krótko o specjalnym rodzaju węzłów i splotów (patrz [219, s. 49-50]).

Definicja 6.2.4 Niech $L \subseteq S^3$ będzie splotem. Jeśli istnieje rodzina F_t powierzchni Seiferta dla splotu K sparametryzowana przez $t \in S^1$ taka, że $F_t \cap F_s = L$ dla $t \neq s$, to splot L nazywamy rozwłóknionym albo włóknistym.

Dawniej nazywano je splotami Neuwirtha, gdyż ten pokazał w swojej pracy dyplomowej z 1959 roku, że można je scharakteryzować jako sploty, których komutant grupy podstawowej jest skończenie generowany, lub równoważnie, wolny. (Warto przeczytać historyczną notatkę u Burdego, Zieschanga, Heusenera [64, s. 68], gdzie wspomina się też węzły, których grupy to nieskończone wolne produkty z amalgamacją).

■ **Przykład 6.2.5** Niewęzeł, trójlistnik 3_1, ósemka 4_1, 5_1, 6_2, 6_3, 7_1, 7_6, 7_7, 8_2, 8_5, 8_7, 8_9, 8_{10}, 8_{12}, $8_{16}..8_{21}$, splot Hopfa oraz wszystkie węzły torusowe są rozwłóknione.

Trójlistnik i ósemka to jedyne węzły rozwłóknione, genusu 1 (patrz [64, s. 79]). ■

(Jeśli węzeł pierwszy o co najwyżej ośmiu skrzyżowaniach nie został wymieniony w tym przykładzie, to nie jest rozwłókniony). Rozkład liczby węzłów rozwłóknionych wśród węzłów pierwszych wygląda następująco:

skrzyżowania	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
węzły pierwsze	1	1	2	3	7	21	49	165	552	2176
rozwłóknione węzły pierwsze	1	1	1	1	3	12	23	74	256	873

Lwia część analizy węzłów o 12 skrzyżowaniach została wykonana przez Stojmenowa i Hirasawę, jak podaje baza danych KnotInfo [277].

Fakt 6.2.6 Niech K będzie węzłem rozwłóknionym. Wtedy wielomian Alexandera $\Delta_K(t)$ jest unormowany (jego wiodący współczynnik to ± 1) oraz stopnia $2g$, gdzie g oznacza genus węzła K.

Dowód tego faktu można znaleźć w monografii Burdego, Zieschanga, Heusenera [64, s. 130]. Odwrotnie, jeżeli $\Delta(t)$ jest wielomianem Alexandera spełniającym te warunki, to istnieje rozwłókniony węzeł o takim wielomianie. Pokazali to dawno temu Burde [60] i później, ale chyba wciąż niezależnie Quach [373]. Trójlistnik i ósemka to jedyne rozwłóknione węzły o genusie 1 (Burde, Zieschang [63], Bing, Martin [31]). Wreszcie Morton [306] pokazał, że wielomian Alexandera nie odróżnia rozwłóknionych węzłów o genusie $\geqslant 2$.

Kanenobu około 1979 roku (albo ktoś inny wcześniej) zauważył, że warunek konieczny 6.2.6 jest też dostateczny dla węzłów pierwszych o co najwyżej 10 skrzyżowaniach. Trzy węzły pierwsze o 11 skrzyżowaniach: $11n_{34}$, $11n_{42}$, $11n_{73}$ oraz osiemnaście o 12 skrzyżowaniach są świadkami, że wynikanie w dwie strony nie zachodzi. Trzynaście z tych osiemnastu: 12n57, 12n210, 12n214, 12n258, 12n279, 12n382, 12n394, 12n464, 12n483, 12n535, 12n650, 12n801 ma wielomian Alexandera, którego stopień jest dwukrotnością 3-genusu (cztery z nich znalazł Mikami Hirasawa, pozostałe Stefan Friedl oraz Taehee Kim). Wiemy to, ponownie, dzięki bazie KnotInfo [277].

■ **Przykład 6.2.7** Niech K będzie węzłem skręconym z n półskrętami. Wtedy K nie jest

rozwłókniony (chyba że $n = 1$), ponieważ jego wielomianem Alexandera jest

$$\Delta_n(t) = n \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right) - (2n + 1). \tag{6.8}$$

■

Wniosek 6.2.8 2-skręcony węzeł 6_1 (węzeł dokerski) nie jest rozwłókniony.

Rolfsen [385, s. 326] podaje jako ćwiczenie w swojej książce:

Fakt 6.2.9 Rodzina węzłów rozwłóknionych jest zamknięta na branie sum spójnych.

Tezę można wzmocnić, szczególnie jeśli znamy twierdzenie Gruszko (o randze wolnego produktu):

Fakt 6.2.10 Suma węzłów $K_1 \# K_2$ jest rozwłókniona wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa składniki takie są.

Niedowód. U Burdego, Zieschange [64, s. 107]. ■

Dzięki książce Kawauchiego [219, s. 84] jesteśmy świadomi jeszcze, że Stallings ma swoje twierdzenie o rozwłóknienieach dla zwartych 3-rozmaitości ze specjalnym przypadkiem:

Fakt 6.2.11 Niech L będzie splotem, π jego grupą podstawową, zaś $f : \pi \to \mathbb{Z}$ pewnym epimorfizmem, który posyła każdy południk na generator t grupy $\mathbb{Z}$. Wtedy splot L jest rozwłókniony wtedy i tylko wtedy, gdy jądro $\ker f$ jest skończenie generowalne.

(Twierdzenie w pełnej ogólności, ale bez dowodu, przytaczają Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 75]).

6.2.3 Genus

Termin genus został wymyślony przez Clebscha około 1864 roku (w „Über die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie", jak można przeczytać w przypisie do pracy „Development of the concept of homotopy" Rii Vanden Eynde) i początkowo oznaczał po prostu liczbę dziur w powierzchni. Jak piszą Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 20], *„the notion of the genus was first introduced by H. Seifert in [406], it holds a central position in knot theory"*; zbadamy więc teraz bliżej ten geometryczny niezmiennik węzłów. (Nie pamiętamy, czemu ta podsekcja znajduje się akurat tutaj, ale chyba nie jest to najgorsze miejsce dla niej.)

Zaczniemy od starego twierdzenia, które klasyfikuje powierzchnie domknięte.

Fakt 6.2.12 Niech S będzie powierzchnią domkniętą. Wtedy dokładnie jedno zdanie z poniższych jest prawdziwe:

1. S jest orientowalna, sumą spójną $g \geqslant 0$ torusów

2. S jest nieorientowalna, sumą spójną $k \geqslant 1$ rzeczywistych płaszczyzn rzutowych.

Liczby g lub k są wyznaczone jednoznacznie.

Sferę traktujemy dla wygody jako sumę spójną $g = 0$ torusów. Wtedy sumę spójną g torusów możemy wyobrazić sobie jako sferę, do której doklejono g rączek. (Suma spójna torusa i płaszczyzny rzutowej jest tym samym, co suma spójna trzech płaszczyzn rzutowych – wykazanie tego jest jednym z kroków w klasyfikacji powierzchni.)

Definicja 6.2.13 — genus powierzchni. Niech S będzie orientowalną powierzchnią będącą sumą spójną g torusów. Liczbę g nazywamy genusem powierzchni S.

Podobna charakteryzacja istnieje dla powierzchni z brzegiem. Każdy taki obiekt jest homeomorficzny z sumą spójną g torusów, w których wydrążono pewną liczbę otworów: tyle, ile składowych spójności ma brzeg powierzchni. W przypadku powierzchni Seiferta mamy do czynienia z jednym otworem.

Definiujemy jeszcze jeden klasyczny niezmiennik powierzchni: charakterystykę Eulera-Poincarégo, odkrytą najpierw dla wielościanów platońskich w 1537 roku przez Francesco Maurolico i wiele lat później przez Eulera dla wielościanów wypukłych. (Obecnie wyprowadza się ją z homologii/algebry homologicznej, ale darujemy to sobie).

Definicja 6.2.14 — charakterystyka Eulera. Niech S będzie domkniętą powierzchnią orientowalną. Po striangulowaniu, składa się z k_0 wierzchołków, k_1 krawędzi oraz k_2 ścian. Wielkość

$$\chi = k_0 - k_1 + k_2 \tag{6.9}$$

jest niezmiennikiem powierzchni, zwanym charakterystyką Eulera.

Definicja ta nie jest wygodna podczas ręcznych obliczeń. Mamy za to:

Fakt 6.2.15 Charakterystykę Eulera powierzchni jednoznacznie wyznaczają cztery reguły, gdzie stale S_1, S_2 są pewnymi powierzchniami, zaś S jest dyskiem:

- $\chi(S) = 1$,
- $\chi(S_1 \sqcup S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2)$,
- Jeśli S_2 powstaje z S_1 przez dołączenie paska, to $\chi(S_2) = \chi(S_1) - 1$,
- Jeśli S_2 powstaje z S_1 przez dołączenie dysku do całej składowej spójności brzegu, to $\chi(S_2) = \chi(S_1) + 1$.

Genus oraz charakterystyka Eulera są ze sobą związane:

Fakt 6.2.16 Niech S będzie powierzchnią o genusie g i μ składowych spójności brzegu. Wtedy zachodzi równość

$$\chi = 2 - \mu - 2\,\mathrm{g}\,. \tag{6.10}$$

Nas interesują głównie powierzchnie Seiferta węzłów:

Fakt 6.2.17 Niech D będzie diagramem o b skrzyżowaniach pewnego węzła K, z którego algorytm Seiferta produkuje d okręgów. Wtedy $\chi(M_D) = d - b$.

Można przeczytać o tym w [328, s. 82].

Dowód. W dowodzie faktu 6.2.3 widzieliśmy, że liczba skrzyżowań b jest jednocześnie liczbą pasków doklejonych do dysków. Bezpośredni rachunek pokazuje, że wtedy $k_0 = 4b$, $k_1 = 6b$ oraz $k_2 = b + d$. Wynika stąd, że $\chi = 4b - 6b + b + d = d - b$. ■

Reszta tej podsekcji nie jest wymagana do zrozumienia macierzy Seiferta, przyjrzymy się genusowi jako obiektowi ciekawemu samemu w sobie.

Definicja 6.2.18 — 3-genus. Niech K będzie węzłem. Wśród wszystkich powierzchni Seiferta węzła K istnieje co najmniej jedna o minimalnym genusie, jej genus nazywamy 3-genusem węzła K i oznaczamy także przez g.

Jeżeli nie powoduje to nieporozumień, zamiast 3-genus można pisać po prostu genus. (Tak samo genus definiują Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 20]).

Fakt 6.2.19 Węzeł K jest niewęzłem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{g}\, K = 0$.

„Genus wykrywa niewęzły".

Dowód. Niech K będzie węzłem o genusie 0. Z charakteryzacji powierzchni wynika, że jego powierzchnia Seiferta to suma spójna 0 torusów, to znaczy kula z tyloma otworami, ile K ma ogniw. Innymi słowy, powierzchnią Seiferta węzła K jest dysk, którego brzeg stanowi niewęzeł. To pokazuje, że implikacja w lewo jest prawdziwa.

Implikacja w prawo jest oczywista. ■

Ograniczanie genusu z dołu

Znalezienie 3-genusu dowolnego węzła sprawia te same trudności, co wyznaczenie jego liczby gordyjskiej. Dowolna powierzchnia Seiferta zadaje ograniczenie z góry. Z dołu 3-genus można szacować przy użyciu wielomianu Alexandera:

Fakt 6.2.20 Niech K będzie węzłem. Wtedy $\operatorname{span} \Delta_K(t) \leqslant 2\,\mathrm{g}(K)$.

To dolne ograniczenie jest realizowane przez pewną powierzchnię Seiferta dla każdego pierwszego węzła o co najwyżej 11 skrzyżowaniach poza siedmioma wyjątkami: $11n_{42}$, $11n_{67}$, $11n_{97}$ ($g = 2$), $11n_{34}$, $11n_{45}$, $11n_{73}$ oraz $11n_{152}$ ($g = 3$). Fakt znaleźliśmy z dowodem w podręczniku Murasugiego [328, s. 121], a potem jako ćwiczenie u Burdego, Zieschanga [64, s. 137], ale nie wiemy, kto pierwszy to zauważył.

Dowód. Załóżmy, że F jest powierzchnią Seiferta węzła K o genusie g. Wtedy macierz Seiferta powstała z F jest stopnia $2g$, więc żaden ze składników jej wyznacznika nie może mieć stopnia (jako wielomian) większego niż $2g$. ■

Fakt 6.2.21 Niech K będzie węzłem, zaś M jego macierzą Seiferta. Równość span $\Delta_K(t) = 2\,\mathrm{g}(K)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik $\det M \neq 0$ jest niezerowy.

Floer [133] zdefiniował przestrzeń wektorową, którą wyposażył w endomorfizm parzystego stopnia (powstający z 2-wymiarowej klasy homologii reprezentowanej przez powierzchnię Seiferta) i kanoniczną gradację modulo 2. Co za słowna gąsienica! Homologia Floera, bo tak nazywamy współcześnie tę przestrzeń, rozkłada się na sumę prostą przestrzeni własnych wyróżnionego endomorfizmu, ich charakterystyki Eulera są współczynnikami wielomianu Alexandera. Pozwala to na dokładniejsze szacowanie genusu węzła, patrz prace Ozsváth, Szabó [350] i Ghigginiego [155]. Homologii Floera nie omawiamy dokładniej, bo jej definicja wykracza za bardzo poza teorię węzłów wyłożoną w tej książce (patrz przedmowa do wydania trzeciego).

Ograniczanie genusu z góry

Z góry genus ograniczony jest przez kilka klasycznych niezmienników numerycznych. Zanim to pokażemy, przytoczymy techniczny lemat udowodniony przez Yamadę [470].

Fakt 6.2.22 Niech L będzie splotem, zaś $\mathrm{s}\,L$ minimalną liczbą okręgów Seiferta, które dostajemy ze wszystkich możliwych diagramów splotu L. Wtedy $\mathrm{s}\,L = \mathrm{b}\,L$ jest równe indeksowi warkoczowemu.

Powyższe stwierdzenie występuje (bez dowodu?) u Kawauchiego [219, s. 17]. Zmyślny dowód Yamady polega na zmianie rzutu tak, by nie zmienić liczby okręgów Seiferta.

Fakt 6.2.23 Niech L będzie splotem. Wtedy $\mathrm{cr}\,L - \mathrm{b}\,L - \mu\,L + 2 \geqslant 2\,\mathrm{g}\,L$.

Dowód. Ustalmy minimalny diagram D dla splotu L i zastosujmy do niego algorytm Seiferta. Dostaniemy tak s okręgów Seiferta oraz powierzchnię o genusie g. Fakt 6.2.17 mówiący, że $\chi = s - c$, można przekształcić do

$$g = \frac{c + 2 - s - \mu(K)}{2}. \tag{6.11}$$

Z minimalności diagramu wynika, że $c = \mathrm{cr}\,L$. Fakt 6.2.22 mówi, że $s \geqslant \mathrm{b}\,L$. Nierówność $g \geqslant \mathrm{g}\,L$ wynika z definicji genusu. Z powyższych rozważań wynika, że

$$\mathrm{cr}\,L + 2 \geqslant 2\,\mathrm{g}\,L + \mathrm{b}\,L + \mu\,L, \tag{6.12}$$

a to jest równoważnie nierówności, której prawdziwości dowodzimy. ■

Wniosek 6.2.24 Niech K będzie węzłem. Wtedy $\mathrm{cr}\,K \geqslant 2\,\mathrm{g}\,K$.

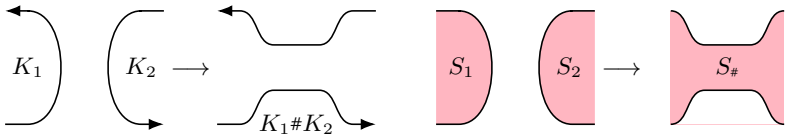
Genus a suma spójna węzłów

Stwierdzamy tutaj, że genus sumy węzłów jest sumą genusów składników i podajemy dowód tego faktu. Analogiczne stwierdzenie dla splotów znaleźć można razem z definicją splotów (lokalnie trywialnych, atoroidalnych, prostych, itd.) u Kawauchiego [219, s. 33-34].

Fakt 6.2.25 Niech K_1, K_2 będą węzłami. Wtedy $\mathrm{g}(K_1 \# K_2) = \mathrm{g}\, K_1 + \mathrm{g}\, K_2$.

Poniższy dowód pochodzi od Schuberta ([399]), został tylko zapisany we współczesnym języku. Przebiega w dwóch etapach: najpierw pokazuje się, że genus sumy nie jest większy od sumy genusów składników, a następnie, że nie jest od niej mniejszy. (Znajdziemy go też u Burdego, Zieschanga [64, s. 98]).

Dowód. Pokażemy najpierw, że $\mathrm{g}(K_1 \# K_2) \leqslant \mathrm{g}(K_1) + \mathrm{g}(K_2)$. Wybierzmy powierzchnie Seiferta S_1 oraz S_2 dla K_1 oraz K_2 o minimalnym genusie. Suma $K_1 \# K_2$ powstaje z K_1 oraz K_2, podobnie jest z powierzchniami Seiferta:



(a) suma węzłów (b) suma powierzchni

Skoro $S_\#$ powstaje z $S_1 \sqcup S_2$ przez dołączenie paska do brzegu, mamy

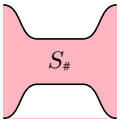
$$\chi(S_\#) = \chi(S_1 \sqcup S_2) - 1 = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 1, \tag{6.13}$$

a przez to

$$\mathrm{g}(S_\#) = \frac{1-\chi(S_\#)}{2} = \frac{1-\chi(S_1)}{2} + \frac{1-\chi(S_2)}{2} = \mathrm{g}(K_1) + \mathrm{g}(K_2). \tag{6.14}$$

To kończy dowód pierwszej nierówności.

Pokażemy jeszcze, że $\mathrm{g}(K_1 \# K_2) \geqslant \mathrm{g}(K_1) + g(K_2)$. Zaczynamy od powierzchni Seiferta $S_\#$ dla $K_1 \# K_2$ o minimalnym genusie $\mathrm{g}(S_\#)$ równym $\mathrm{g}(K_1 \# K_2)$. Poprzez wykonanie chirurgii na powierzchni, możemy przyjąć specjalną postać jak w poprzednim dowodzie:



Usunięcie paska daje powierzchnie Seiferta dla S_1 oraz S_2 takie, że

$$\mathrm{g}(S_1) + \mathrm{g}(S_2) = \mathrm{g}(S_\#) = \mathrm{g}(K_1 \# K_2). \tag{6.15}$$

Oznacza to, że $\mathrm{g}(K_1) + \mathrm{g}(K_2) \leqslant \mathrm{g}(S_1) + \mathrm{g}(S_2) = \mathrm{g}(K_1 \# K_2)$ i mamy równość. ■

Jesteśmy wreszcie w stanie podać „prawdziwy dowód" faktu 2.3.5.

Wniosek 6.2.26 Jeśli suma spójna dwóch węzłów jest niewęzłem, to oba składniki także nim są.

Powrócimy teraz do węzłów pierwszych.

Fakt 6.2.27 Niech K będzie węzłem. Jeśli $\mathrm{g}(K) = 1$, to K jest węzłem pierwszym.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że węzeł $K = K_1 \# K_2$ jest sumą dwóch nietrywialnych węzłów. Z faktu 6.2.25 wynika wtedy, że $g(K) = g(K_1) + g(K_2)$. Zatem jeden z węzłów K_1, K_2 ma genus zero i jest trywialny, wbrew naszemu założeniu. ■

Implikacja odwrotna jest fałszywa: pięciolistnik jest pierwszy, ale jego genus wynosi 2. Spośród 2977 węzłów pierwszych do 12 skrzyżowań, tylko 23 posiada genus równy jeden. Są to: 3_1, 4_1, 5_2, 6_1, 7_2, 7_4, 8_1, 8_3, 9_2, 9_5, 9_{35}, 9_{46}, 10_1, 10_3, $11a_{247}$, $11a_{343}$, $11a_{362}$, $11a_{363}$, $11n_{139}$, $11n_{141}$, $12a_{803}$, $12a_{1166}$ oraz $12a_{1287}$.

Fakt 6.2.28 Każdy węzeł K można zapisać w postaci sumy spójnej pewnej liczby węzłów pierwszych $K_1 \# K_2 \# \ldots \# K_n$. Niewęzeł jest sumą pustej rodziny węzłów.

Dowód. Dowodzimy przez indukcję względem genusu $\mathrm{g}(K)$. Przypadek bazowy $\mathrm{g}(K) = 0$ jest oczywisty, gdyż wtedy K to niewęzeł. Załóżmy więc, że fakt zachodzi dla węzłów J genusu co najwyżej n. Niech K będzie genusu $n+1$.

Jeśli K jest pierwszy, nie ma czego dowodzić. W przeciwnym razie jest równoważny z $J_1 \# J_2$, gdzie J_1 i J_2 są nietrywialne. Mamy $\mathrm{g}(J_1) + \mathrm{g}(J_2) = g(K)$ oraz $\mathrm{g}(J_1), \mathrm{g}(J_2) \geqslant 1$. Zatem $\mathrm{g}(J_1), \mathrm{g}(J_2) \leqslant n$. Na mocy hipotezy indukcyjnej, J_1 oraz J_2 są równoważne sumom

$$J_1 \cong K_1 \# \cdots \# K_s, \qquad J_2 \cong K_{s+1} \# \cdots \# K_r,$$

gdzie K_i są pierwsze. Zatem K jest równoważny z $K_1 \# \cdots \# K_r$, co kończy dowód. ■

Nasz aparat matematyczny jest niedostatecznie rozwinięty, by móc udowodnić jedyność rozkładu. Niestety!

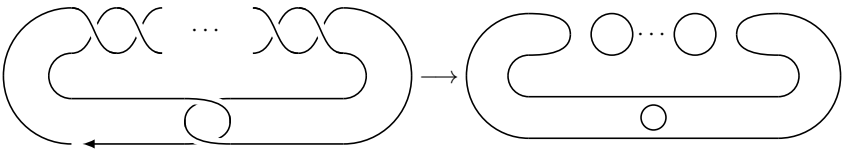
Twierdzenie 6.2.29 — Schubert, 1949. Każdy nietrywialny węzeł rozkłada się na węzły pierwsze. Rozkład jest, z dokładnością do kolejności składników, jednoznaczny.

Schubert podał geometryczny dowód oparty o powierzchnie Seiferta; wyraził go w języku PL-rozmaitości ([399]), ale niedużym wysiłkiem można dokonać adaptacji do gładkiego świata. Praca Schuberta korzysta z twierdzenia Alexandera, że 2-sfera w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ogranicza dysk, i jego odpowiednika dla torusów w S^3.

Hashizume [181] rozszerzył wyniki Schuberta do splotów.

Fakt 6.2.30 Istnieje nieskończenie wiele węzłów pierwszych.

Dowód. Pokażemy, że wszystkie węzły $(2n+2)_1$ są pierwsze, gdzie $n \geqslant 1$. Istotnie, algorytm Seiferta zastosowany do diagramu tego węzła wyprodukuje $2n+1$ okręgów.



Wynika stąd, że genus wynosi $\frac{1}{2}(1 - (1+2n) + (2+2n)) = 1$, ponieważ wyznacznik ma wartość $4n+1$, węzły $(2n+2)_1$ nie są trywialne i są parami różne. ■

Genus kanoniczny, genus wolny

Czy w definicji genusu można ograniczyć się do tych powierzchni Seiferta, które produkuje algorytm Seiferta? Niestety, poza pewnymi wyjątkami, nie. Zanim przekonamy się, dlaczego tak jest, zdefiniujmy jeszcze dwa niezmienniki.

Definicja 6.2.31 — genus kanoniczny. Niech K będzie węzłem. Najmniejszy z genusów powierzchni Seiferta węzła K, które pochodzą z algorytmu Seiferta, nazywamy genusem kanonicznym i oznaczamy symbolem $\mathrm{g_c}\, K$ lub krótko g_c.

Stojmenow [425] opisał diagramy węzłów o kanonicznym genusie równym 2. Część z jego wyników przenosi się na genus 3. Jak sam pisze, sklasyfikowane wcześniej węzły o genusie (kanonicznym) 1 okazały się być zbyt wąską klasą.

Pod koniec lat pięćdziesiątych Crowell i Murasugi niezależnie zauważyli, że algorytm Seiferta zastosowany do alternującego diagramu zawsze daje powierzchnię o minimalnej powierzchni. Ich kombinatoryczne uzasadnienie było dość zawiłe, elementarny dowód podał Gabai [149].

Dubel trójlistnika ma genus równy 1, ale algorytm Seiferta zastosowany wobec węzła produkuje powierzchnie o genusie co najmniej 3, jak przewiduje ograniczenie znalezione przez Mortona [307, twierdzenie 2]:

Fakt 6.2.32 Niech $P(v,z)$ będzie wersją wielomianu HOMFLY spełniającą zależność

$$\frac{1}{v}P_+ - vP_- = zP_0. \tag{6.16}$$

Wtedy $M = \max \deg_z P(v,z) \leqslant 2g_c$.

Ramię w ramię udało się pokazać, że dla wielu klas węzłów znak $\leqslant$ w nierówności Mortona można zastąpić przez $=$. Chronologicznie, pokazano to dla węzłów alternujących (Crowell [102], niezależnie Murasugi [319] około 1959), jednorodnych[4] (Cromwell [100] w 1989), dubli whiteheadowskich węzłów dwumostowych (Nakamura [331], Tripp [444] na początku XXI wieku) czy wreszcie dubli alternujących precli (Brittenham, Jensen [54]). Stojmenow [419] sprawdził, że nierówność Mortona jest równością dla wszystkich węzłów do 12 skrzyżowań; znalazł też przykłady węzłów, dla których jest ostra: 15_{100154}, 15_{167945}.

Definicja 6.2.33 — genus wolny. Niech K będzie węzłem. Minimalny genus spośród powierzchni Seiferta węzła K, których dopełnienie w 3-sferze jest ciałem z rączkami, nazywamy genusem wolnym i oznaczamy g_f.

(O ciałach z rączkami piszą Burde, Zieschang [64, s. 44-48]). Dopełnienie powierzchni Seiferta jest zawsze ciałem z rączkami, więc mamy oczywiste nierówności

$$g \leqslant g_f \leqslant g_c. \tag{6.17}$$

Jak duża może być różnica między kolejnymi genusami? Już Kirby [226, problem 1.20a] chciał znać oszacowania różnicy $g_f - g$. Morton [307] pokazał, że genus pewnych węzłów nie jest realizowany przez żaden diagram do którego stosuje się algorytm Seiferta, choćby 10_{165}. Moriah, matematyk izraelski, rozwiązał problem Kirby'ego dekadę później:

[4] Uogólnienie węzłów alternujących.

Fakt 6.2.34 Niech K będzie węzłem, $D_k(K)$ jego dublem Whiteheada z $k \neq 0$ skręceniami, zaś $B_n(K)$ to n-krotne nakrycie cykliczne sfery S^3 rozgałęzione nad węzłem K. Jeżeli ranga pierwszej grupy homologii $B_{|4k+1|}(K)$ wynosi r, to

$$g_f(D_k(K)) \geqslant \frac{2r-1}{|8k+2|}. \tag{6.18}$$

Dowód. Praca [305]. Dowód opiera się na chirurgii węzłów i splotów w sferze S^3. ■

Wniosek 6.2.35 Niech K bedzie sumą spójną n trójlistników, połóżmy $k = -1$. Wtedy pierwsza grupa homologii ma rangę $r = 2n$ i genus wolny jest nieograniczony

$$g_f(D_{-1}(3_1^n)) \geqslant \frac{4n-1}{6}, \tag{6.19}$$

podczas gdy zwykły genus to $g(D_{-1}(3_1^n)) = 1$.

Kawauchi [218] zbadał węzeł K_m, sumę spójną m kopii skręconego whiteheadowskiego dubla trójlistnika, i policzył, że różnica $g_c(K_m) - g(K_m)$ wynosi $2m$. Wreszcie Kobayashi oraz Kobayashi [231] wskazali nieskończoną rodzinę węzłów nieograniczonego genusu, dla której

$$g_c(K) = \frac{3}{2} g_f(K) = 2g(K). \tag{6.20}$$

6.2.4 Macierz Seiferta

Macierz opisana w tej podsekcji nie jest niezmiennikiem węzłów, ale prowadzi do wielomianu Alexandera (i dwóch nowych niezmienników: sygnatury i niezmiennika Arfa).

Niech K będzie węzłem z diagramem D i powierzchnią Seiferta S.

Definicja 6.2.36 — graf Seiferta. Graf otrzymany przez ściągnięcie dysków z dowodu faktu 6.2.3 do punktów oraz skurczenie doklejonych pasków do krawędzi nazywamy grafem Seiferta diagramu D.

Murasugi [328, s. 79] proponuje jako ćwiczenie dowód faktu:

Fakt 6.2.37 Każdy graf Seiferta jest dwudzielny i planarny.

Skoro graf Seiferta jest planarny, to dzieli sferę S^2 na f obszarów. Można wyznaczyć ich liczbę: skoro $\chi(S^2) = d - b + f = 2$, to $f - 1 = 1 - d + b$, pomijamy obszar nieograniczony. Brzeg każdego obszaru jest zamkniętą krzywą, z których tworzymy krzywe $x_1, \ldots, x_m$ na powierzchni Seiferta. Generują one grupę podstawową $\pi_1(S)$.

Niech S będzie powierzchnią Seiferta z wyróżnioną wierzchnią stroną. Jeśli krzywa x_i biegnie po powierzchni S, przez x_i^* oznaczać będziemy dodatnie wypchnięcie: równoległą do x_i krzywą, która biegnie tuż nad nią. (W razie problemów z wyobrażeniem sobie tego, można wykonać papierowy model powierzchni Seiferta albo popatrzeć na rysunek w [274, s. 111] albo zrobić jedno i drugie).

Definicja 6.2.38 — macierz Seiferta. Przy zachowaniu powyższych oznaczeń, macierz, której wyrazy określa wzór $M_{i,j} = \mathrm{lk}(x_i, x_j^*)$, nazywamy macierzą Seiferta.

Konstrukcja macierzy Seiferta zależy od wyboru diagramu oraz orientacji krzywych x_i, dlatego nie jest niezmiennikiem węzłów. Stanie się nim, kiedy uwzględnimy jeszcze wpływ ruchów Reidemeistera.

Fakt 6.2.39 Kwadratowa macierz V o całkowitych wyrazach jest macierzą Seiferta węzła wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(V - V^t) = 1$.

Dowód. Kawauchi [219, s. 62] pisze, że wynika to z klasyfikacji macierzy Seiferta splotów. ■

Definicja 6.2.40 Dwie macierze M_1, M_2 nazywamy S-równoważnymi, jeśli jedną z nich daje się otrzymać z drugiej poprzez wykonanie skończonego ciągu operacji Λ_1, Λ_2 oraz ich odwrotności.

Operacji Λ_2 nie można krótko opisać słowami, ale na szczęście można wzorem: niech $*$ będzie dowolną liczbą całkowitą, wtedy

$$\Lambda_2(M) = \begin{bmatrix} & & & 0 & 0 \\ & M & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ albo } \begin{bmatrix} & & & * & 0 \\ & M & & \vdots & \vdots \\ & & & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.21}$$

Operacja Λ_1 polega na zastąpieniu macierzy M przez PMP^t, gdzie P jest dowolną odwracalną macierzą o całkowitych wyrazach (wtedy $\det P = \pm 1$).

Badania powyższej relacji równoważności prowadzili w latach sześćdziesiątych ubiegłego stulecia Trotter [446], Murasugi [321] oraz Levine [259]. Litera S, jak nietrudno się domyślić, pochodzi od Seiferta.

Fakt 6.2.41 Macierz Seiferta modulo S-równoważność jest niezmiennikiem splotów.

Dowód tego faktu jest elementarny, ale dość długi. Razem z ułatwiającymi zrozumienie diagramami można znaleźć go w podręczniku Kawauchiego [219, s. 64] albo Murasugiego; liczne inne dowody wzmiankują Burde, Zieschang [64, s. 152]. Dlatego my możemy pozwolić sobie na przeskoczenie go i skupimy się na tym, jakie niezmienniki można otrzymać z macierzy Seiferta.

Wyznacznik całej macierzy Seiferta nie jest niezmiennikiem. Wykonując operację Λ_2 dostajemy macierz, której ostatnia kolumna albo ostatni wiersz są zerami, więc jej wyznacznik także jest zerem. Jeśli jednak najpierw dokonamy jej symetryzacji, dostaniemy znany już niezmiennik.

Fakt 6.2.42 Niech M będzie macierzą Seiferta węzła K. Wtedy

$$\det K = |\det(M + M^t)|. \tag{6.22}$$

Przez wprowadzenie dodatkowej zmiennej $t \in \mathbb{R}$, ponownie uogólnimy wyznacznik do wielomianu Alexandera.

Fakt 6.2.43 Niech M będzie macierzą Seiferta stopnia k węzła K. Wtedy

$$\Delta_K(t) = t^{-k/2} \det(M - tM^t). \tag{6.23}$$

6.2.5 Sygnatura

Sygnatura jest kolejnym niezmiennikiem, do zdefiniowania których wystarczy znać macierz Seiferta. Pochodzi prawdopodobnie z lat sześćdziesiątych (Trotter [446] dla węzłów, Murasugi [321] dla splotów). Ktoś powiedział nam kiedyś, że ujednolicenia różnych podejść do form kwadratowych związanych z węzłami dokonali Gordon, Litherland, Murasugi w pracy [168], ale potem trafiliśmy na artykuł Przytyckiego [369] pełen historycznych ciekawostek oraz dwóch kolejnych odnośników: do wspomnianej przed chwilą pracy [321], ale też [167] samych Gordona, Litherlanda, którzy sięgają zenitu i wiążą dziełą Goeritza, Trottera, Murasugiego et alli. Może po prostu najlepiej przeczytać wszystko?

Definicja 6.2.44 — sygnatura. Niech M będzie macierzą Seiferta zorientowanego splotu L. Wielkość

$$\sigma_L := \sigma(M + M^t), \tag{6.24}$$

sygnaturę macierzy $M + M^t$, nazywamy sygnaturą splotu L.

Fakt 6.2.45 Sygnatura jest addytywna: $\sigma(K_1 \# \ldots \# K_n) = \sum_{k=1}^{n} \sigma(K_k)$.

Wiemy o tym od Murasugiego [328, s. 127].

Dowód. Bez straty ogólności ograniczmy się do przypadku $n = 2$ i ustalmy powierzchnie Seiferta F_1, F_2 dla węzłów K_1, K_2 z macierzami Seiferta M_1, M_2. Powierzchnia dla ich sumy spójnej $K_1 \# K_2$ powstaje przez sklejenie F_1 oraz F_2 paskiem. W języku macierzy oznacza to, że macierz Seiferta węzła $K_1 \# K_2$ ma postać $M = M_1 \oplus M_2$. Zatem:

$$\begin{aligned} \sigma(K_1 \# K_2) &= \sigma(M + M^t) && (6.25)\\ &= \sigma(M_1 + M_1^t) + \sigma(M_2 + M_2^t) && (6.26)\\ &= \sigma(K_1) + \sigma(K_2), && (6.27) \end{aligned}$$

co kończy dowód. ∎

Wniosek 6.2.46 Nie istnieje bezpośredni związek między sygnaturą i liczbą mostową.

Wiemy o tym z książki Livingstona [274, s. 145].

Dowód. Węzeł torusowy $T_{2,n}$ jest dwumostowy, jego sygnatura wynosi $n - 1$. Suma spójna węzłów prostych (sumy przeciwnie zorientowanych trójlistników) ma zerową sygnaturę, ale na mocy faktu 3.3.3 jej liczba mostowa jest nieograniczona. ∎

Fakt 6.2.47 Niech L będzie splotem. Wtedy $\sigma(mL) = -\sigma(L)$ oraz $\sigma(rL) = \sigma(L)$.

O tym także wiemy od Murasugiego [328, s. 127].

Dowód. Wynika to z podobnych faktów dla macierzy Seiferta. Równoważność $M_{mL} \simeq -M_L^t$ wynika z tego, że zamiana nad- i podskrzyżowań odwraca wzajemne położenie krzywych, których indeksu zaczepienia szukamy.

Podobnie pokazuje się, że $M_{rL} \simeq M_L^t$. ■

Wniosek 6.2.48 Jeśli K jest węzłem achiralnym, to $\sigma(K) = 0$.

Węzły achiralne mają zerową sygnaturę, zatem trójlistnik nie jest achiralny. Z faktów 6.2.45 oraz 6.2.47 wynika, że suma tak samo zorientowanych trójlistników nie jest achiralna ($\sigma = \pm 4$). Jak można przekonać się ze standardowego diagramu węzła prostego, ten jest achiralny. Pisaliśmy coś o tym na stronie 39.

Fakt 6.2.49 Niech K będzie węzłem. Jeśli $\Delta_K(t) \equiv 1$, to $\sigma(K) = 0$.

Założenie $\Delta_K(t) \equiv 1$ jest spełnione przez cztery węzły pierwsze do 12 skrzyżowań, są to $11n_{34}, 11n_{42}, 12n_{313}$ oraz $12n_{430}$, patrz wzmianka po fakcie 5.1.6.

Dowód. Murasugi twierdzi, że zostało to udowodnione przez Milnora w [298], nie jesteśmy jednak pewni, gdzie dokładnie, ale raczej poza sekcją piątą. ■

Istnieje równoważna definicja, która nie wymaga czasochłonnego wyznaczania macierzy Seiferta.

Fakt 6.2.50 Sygnatura to niezmiennik topologiczny zadany kłębiastą relacją rekurencyjną:

- $\sigma(\bigcirc) = 0$,
- $\sigma(K_+) - \sigma(K_-) \in \{0, 2\}$,
- $4 \mid \sigma(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nabla(2i) > 0$, gdzie ∇ to wielomian Conwaya.

Symbole K_+, K_- objaśnione są przy definicji 5.1.10.

Dowód. Wystarczy pokazać, że sygnatura węzła spełnia trzy powyższe aksjomaty, a następnie zauważyć, że korzystając z nich jesteśmy w stanie wyznaczyć jednoznacznie sygnaturę dla dowolnego węzła. Wynika to z faktu, że każdy węzeł można zmienić w niewęzeł odwracając pewne skrzyżowania. Pomysł opisał dokładnie Giller [158, trzecie spostrzeżenie], sam oparł się o [321, twierdzenie 5.6]. ■

Sygnatura pozwala uzyskać proste oszacowanie liczby gordyjskiej od dołu:

Fakt 6.2.51 Mamy $2u(K) \geqslant |\sigma(K)|$.

Liczba gordyjska 83 z 801 węzłów pierwszych o mniej niż dwunastu skrzyżowaniach nie jest jeszcze znana. Dla 272 spośród pozostałych mamy równość $2u = |\sigma|$.

Dowód. Ustalmy diagram D dla węzła K. Odwrócenie dowolnego skrzyżowania polega na przejściu z diagramu D_+ do D_- lub z D_- do D_+. Zgodnie z relacją kłębiastą, sygnatura pozostaje taka sama lub zmienia wartość o 2. Po wykonaniu u odwróceń otrzymujemy diagram niewęzła o sygnaturze zero, zatem sygnatura wyjściowego węzła nie mogła przekraczać $2u$. To kończy dowód. ∎

W [409] Shinohara pokazał, że dla każdej pary nieujemnych liczb całkowitych m, n istnieje węzeł K o wyznaczniku $4m+1$ ($8m+5, 4m+3$) oraz sygnaturze bez znaku $8n$ ($8n+4, 4n+2$). Ponadto, jeśli m nie dzieli się przez 3, istnieje węzeł o wyznaczniku $8m+1$ i sygnaturze bez znaku $8n+4$.

Czas na raczej niezbyt użyteczną ciekawostkę.

Hipoteza 6.2.52. *Czy istnieje węzeł o sygnaturze 4 i wyznaczniku postaci $n = 4k+1$?*

Stojmenow twierdzi, że jeśli tak jest, to wszystkie pierwsze dzielniki n muszą dawać resztę 1 z dzielenia przez 24 i są większe od 2857. Patrz [344, s. 540].

Czytając przeglądową pracę Conwaya [93] dowiedzieliśmy się, że w latach sześćdziesiątych sygnatura została uogólniona do funkcji $\sigma_L\colon S^1 \to \mathbb{Z}$. Większość podręczników, a także prace Levine'a [258] oraz Tristrama [445], wprowadza ją przy użyciu macierzy Seiferta, więc my postąpimy dokładnie tak samo.

Definicja 6.2.53 — sygnatura Levine'a-Tristrama. Niech M będzie macierzą Seiferta zorientowanego splotu L. Funkcję $\sigma_L\colon S^1 \to \mathbb{Z}$ daną wzorem

$$\sigma_L(\omega) := \sigma[(1-\omega)M + (1-\overline{\omega})M^t] \tag{6.28}$$

nazywamy sygnaturą Levine'a-Tristrama splotu L. Jest niezmiennikiem splotów.

Funkcja σ_L jest kawałkami stała. Conway pisze w [93], że wynika to ze wzoru na wielomian Alexandera $\Delta_L(t) = \det(tM - M^t)$. Jedynymi punktami nieciągłości są zera wielomianu $(t-1)\Delta_L(t)$, to świeży wynik Gilmera, Livingstona z [159].

Mówimy, że funkcja zdefiniowana na okręgu jest zbalansowana, jeżeli w każdym punkcie nieciągłości przyjmuje wartość równą średniej z lewo- oraz prawostronnej granicy w tym punkcie. Livingston podał pełną charakteryzację zbilansowanych sygnatur Levine'a-Tristrama dla węzłów, analogiczny problem dla splotów wydaje się być wciąż otwarty.

Fakt 6.2.54 Funkcja zbalansowana $\sigma\colon S^1 \to \mathbb{Z}$ jest realizowana jako sygnatura pewnego węzła wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. dla każdego $\omega \in S^1$ mamy $\sigma(\omega) = \sigma(\overline{\omega})$,
2. $\sigma(1) = 0$,
3. każdy punkt nieciągłości funkcji σ jest miejscem zerowym wielomianu Alexandera węzła,
4. jeżeli argumenty ω_1, ω_2 są sprzężone w sensie Galois, to $\sigma(\omega_1) \equiv \sigma(\omega_2)$ modulo 2.

Dowód. Livingston pisze w [276], że dowód w prawą stronę jest dość dobrze znany, natomiast w lewo korzysta z wyników Kondo [239] i Sakaiego [391], że każdy wielomian Alexandera węzła jest realizowany przez węzeł 1-gordyjski oraz zachowania zbalansowanej sygnatury podczas odwracania skrzyżowania. ∎

Kawauchi [219, s. 151] wspomina nierówność[5] u $K \geqslant \log_3 |Q(-1)|$, ale nie podaje żadnych przykładów. Poprawimy ten stan rzeczy. Węzeł 8_{18} jest 2-gordyjski i jego wielomian BLM/Ho wynosi

$$Q(8_{18}; x) = 6x^7 + 24x^6 + 14x^5 - 36x^4 - 26x^3 + 12x^2 + 2x + 5, \tag{6.29}$$

więc $Q(8_{18}, -1) = 9$ i żaden 1-gordyjski węzeł nie może mieć tego samego wielomianu BLM/Ho (ani Kauffmana) jak 8_{18}. (Dokładnie to samo rozumowanie działa dla 9_{35}, 9_{37}, 9_{46}, 9_{47}, 9_{48}, 10_{74}, 10_{75}, 10_{98}, 10_{99}, 31 węzłów pierwszych o 11 skrzyżowaniach i 123 węzłów pierwszych o 12 skrzyżowaniach).

Fakt 6.2.55 Niech węzeł S będzie satelitą z towarzyszem C, wzorcem P oraz indeksem zaczepenia n. Wtedy

$$\sigma_S(\omega) = \sigma_P(\omega) + \sigma_C(\omega^n). \tag{6.30}$$

Dowód. Szczególny przypadek $\omega = -1$ rozpatrywał wcześniej Shinohara [409]. Pełny dowód znajduje się w artykule Litherlanda [272]. ■

Wreszcie:

Fakt 6.2.56 Niech L będzie splotem. Wtedy albo wielomian Alexandera $\Delta_L(t)$ jest zerem tożsamościowo, albo posiada co najmniej $|\sigma_L|$ zer, liczonych z krotnościami, na okręgu jednostkowym.

Dowód. Aneks w książce Liechtiego [267], która nie wygląda na związaną z teorią węzłów. ■

6.3 Niezmiennik Arfa

Cahit Arf wprowadził w 1941 roku pewien niezmiennik nieosobliwych form kwadratowych nad ciałem charakterystyki dwu. Zrobił to między innymi po to, by sklasyfikować takie formy kwadratowe. My poznamy wariant niezmiennika Arfa dla węzłów.

Niech $(v_{i,j})$ będzie macierzą Seiferta węzła K o genusie g. Wtedy jej wymiary wynoszą $2g \times 2g$ i macierz $V - V^t$ jest symplektyczna.

Definicja 6.3.1 Zachowując powyższe oznaczenia, niezmiennik Arfa to

$$\sum_{i=1}^{g} v_{2i-1,2i-1} v_{2i,2i} \pmod 2. \tag{6.31}$$

Niezmiennik Arfa dla węzłów można zdefiniować na kilka sposobów, z których żaden nie jest istotnie lepszy od pozostałych. Pierwszy był pomysł Robertello [384]:

Fakt 6.3.2 — Robertello, 1965. Niech K będzie węzłem, zaś

$$\Delta_K(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n + \cdots + c_0 t^{2n} \tag{6.32}$$

jego wielomianem Alexandera. Wtedy niezmiennik Arfa to $c_{n-1} + c_{n-3} + \cdots + c_r \mod 2$,

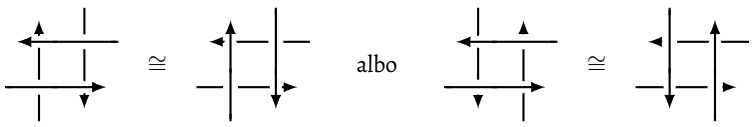
[5] Przytycki [367, s. 198] podaje w formie ćwiczeń, że u $K \geqslant \log_3 \tau_3 K - 1$, gdzie τ_3 zlicza trójkolorowania; ponadto $\tau_3 L \leqslant 3^{\mathrm{br}\, L}$ dla splotów L.

gdzie $r = 0$ dla nieparzystych n, $r = 1$ w przeciwnym razie.

Nieco później Murasugi [322] zauważył, że warunek można uprościć:

Fakt 6.3.3 — Murasugi, 1969. Niech K będzie węzłem. Wtedy $\operatorname{Arf} K = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta_K(-1) \equiv \pm 1 \mod 8$.

Kauffman [211, s. 143] zaproponował trochę inne podejście z wykorzystaniem diagramów. Dwa węzły nazwiemy równoważnymi przez przejścia, jeśli są związane skończenie wieloma „przejściami":



Definicja 6.3.4 — Kauffman, 1983. Każdy węzeł K jest równoważny przez przejścia albo z niewęzłem (wtedy mówimy, że $\operatorname{Arf} K = 0$), albo z trójlistnikiem (wtedy, że $\operatorname{Arf} K = 1$).

Wreszcie Jones [203, tw. 19] zauważył, że dzięki zespolonym algebrom Clifforda oraz pracy Lannesa [257] niezmiennik Arfa jest specjalną wartością wielomianu Jonesa. Jest to jedyna definicja, którą łatwo rozszerzyć do splotów.

Fakt 6.3.5 — Jones, 1985. $\operatorname{Arf}(K) = V_K(i)$.

Wniosek 6.3.6 Niezmiennik Arfa jest #-addytywny modulo 2.

Dowód. Wynika to z faktów 6.3.5 oraz 5.2.20 ■

O niezmienniku Arfa usłyszymy jeszcze poznając węzły plastrowe.

6.4 Homologie Chowanowa

Reszta książki nie zależy od tej sekcji, więc Czytelnik nie dozna większego uszczerbku na wiedzy, jeśli pominie tę i kilka następnych stron (na przykład dlatego, że nie zna kompleksów łańcuchowych, różniczek, grup homologii, i tak dalej). Homologię Chowanowa nazywa się kategoryfikacją wielomianu Jonesa. Zanim zagłębimy się w szczegóły, rozpatrzmy prostszy przykład tego procesu. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, wtedy charakterystykę Eulera oraz grupy homologii łączy zależność

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{\dim X} (-1)^n \operatorname{rk} H_n(X), \tag{6.33}$$

a przy tym grupy homologii dostarczają więcej informacji, co więcej można o nich myśleć jako (jak o? : |) funktorach. Homologie są kategoryfikacją charakterystyki Eulera.

Niech L będzie splotem, zaś D jego diagramem. Chowanow [221] odkrył, że całkowite współczynniki we wzorze o sumowaniu stanów można zamienić na kompleksy grup abelowych.

Skonstruował rodzinę grup $\mathcal{H}^{i,j}(D)$ takich, że

$$K(L,q) = \sum_{i,j} q^j(-1)^i \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{H}^{i,j}(D) \otimes \mathbb{Q}), \tag{6.34}$$

gdzie K jest wersją wielomianu Jonesa. Niestety opis konstrukcji grup $\mathcal{H}^{i,j}$ przeładował algebraicznymi szczegółami, dlatego później Bar-Natan [25], Viro [457] przygotowali swoje teksty z myślą o topologach. My opierać się będziemy o późniejszy artykuł Viro [458], który został napisany, gdyż *„Nonetheless, in most of the papers on Khovanov homology, the differences between [25] and [457] are taken too seriously. In this paper I discuss the constructions again. I begin with the approach of [457]. (...) Then I identify this construction with the construction of [25] and [221]"*. Viro [458] wymienia kilka innych dobrych miejsc, gdzie można zacząć wycieczkę do zrozumienia homologii Chowanowa: Turnera [451] albo Bar-Natana [25], a potem Szumakowicza [411], Chowanowa [221].

Viro zauważa, że powszechna definicja wielomianu Jonesa sprawia problem dla pustego splotu (którego nigdy wcześniej nie rozpatrywaliśmy). Mamy:

$$V_{\varnothing} = \frac{1}{-t^{1/2} - t^{-1/2}}, \tag{6.35}$$

a to nie jest wielomian Laurenta jednej zmiennej. Dlatego definiuje powiększony wielomian Jonesa:

$$\widetilde{V_L}(t) = (-t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot V_L(t), \tag{6.36}$$

i mówi, że będzie kategoryfikować powiększony wielomian Jonesa, a właściwie powiększoną klamrę Kauffmana. Niech $q := -t^{1/2}$. Dostaje się tak nowy wielomian, nazwijmy go K. Spełnia trzy aksjomaty:

- (normalizacja) $K(\bigcirc) = q + 1/q$;
- (stabilizacja) $K(L \sqcup \bigcirc) = (q + 1/q)K(L)$;
- (relacja kłębiasta) $q^{-2}K(L_+) - q^2K(L_-) = (q^{-1} - q)K(L_0)$.

(Symbolika jak w definicji 5.1.10). Stąd widać już, jakie grupy dobrać dla niewęzła:

$$H^{i,j} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{jeśli } i = 0, j = \pm 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{6.37}$$

Wtedy spełniona jest równość

$$K(L,q) = \sum_{i,j} (-1)^i q^j \operatorname{rk} H^{i,j}(L). \tag{6.38}$$

Pozostało powtórzyć to dla dowolnego splotu. Wzór o sumowaniu stanów przybiera postać:

$$K(L,q) = \sum_s (-1)^{(\operatorname{wr} D - |s|)/2} q^{(3\operatorname{wr} D - |s|)/2} (q + 1/q)^{|sD|}. \tag{6.39}$$

Reprezentacja ta ma jedną wadę: każdy składnik z prawej strony przyczynia się do różnych jednomianów, zatem ma wpływ na różne grupy (których dopiero szukamy). „Surowe" stany nie są prawdziwym odpowiednikiem sympleksów, jakie spotyka się podczas kategoryfikacji charakterystyki Eulera. Najprostszym pomysłem, jak to naprawić, jest rozbicie ostatniej potęgi $q + 1/q$. Zauważmy, że ma tyle czynników, ile wygładzenie diagramu ma składowych. To motywuje definicję:

Definicja 6.4.1 — stan wzbogacony. Stan diagramu D razem z przypisaniem znaku $+$ lub $-$ do każdego okręgu sD nazywamy stanem wzbogaconym.

Dla ustalonego wzbogaconego stanu S diagramu D oznaczmy przez $\tau(S)$ sumę znaków przypisanych do okręgów[6]. Wtedy

$$q^{(3\,\mathrm{wr}\,D-|s|)/2}(q+1/q)^{|sD|} = \sum_{S/s} q^{(3\,\mathrm{wr}\,D-|s|+2\tau(S))/2}, \tag{6.40}$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich stanach S wzbogacających stan s. Niech

$$j(S) := \frac{1}{2}(3\,\mathrm{wr}\,D - |s| + 2\tau(S)). \tag{6.41}$$

Dobrnęliśmy do

$$K(L,q) = \sum_{S} (-1)^{(\mathrm{wr}\,D-|s|)/2} q^{j(S)}, \tag{6.42}$$

tym razem sumujemy po wszystkich wzbogaconych stanach diagramu D.

Potrzebujemy jeszcze trochę nowych obiektów. Niech $C(D)$ oznacza wolną abelową grupę generowaną przez wzbogacone stany diagramu D, a $C^j(D)$ będzie jej podgrupą generowaną przez wzbogacone stany S takie, że $j(S) = j$.

Czyni to $C(D)$ wolną grupą abelową z $\mathbb{Z}$-gradacją:

$$C(D) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} C^j(D). \tag{6.43}$$

Dla ustalonego stanu wzbogaconego S, niech $i(S) = (\mathrm{wr}\,D - |s|)/2$. Określmy ostatnią podgrupę, $C^{i,j}(D) \leqslant C^j(S)$ generowaną przez wzbudzone stany S, dla których $i(S) = i$. Dostajemy wreszcie

$$K(L,q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \,\mathrm{rk}\, C^{i,j}(D). \tag{6.44}$$

Teraz „wystarczy" zdefiniować funkcję $d\colon C^{i,j} \to C^{i+1,j}$ oraz sprawdzić, że $d^2 = 0$, czyli że d jest różniczką. I to byłby już koniec, ale nam brakuje sił, by przybliżyć konstrukcję. Różniczka pozwala przejść z grup $C^{i,j}$ do grup homologii. Pewne wyjaśnienia znaleźć można w [370, s. 42], gdzie podano przepis wymagający tylko ponumerowania skrzyżowań.

Topolog izraelski Bar-Natan [26] podał algorytm[7] o złożoności obliczeniowej $O(\exp(c\sqrt{n}))$ liczący homologie Chowanowa, gdzie c jest pewną stałą, zaś n liczbą skrzyżowań na diagramie. Nie możemy liczyć na istotne przyspieszenie: znalezienie przybliżenia wielomianu Jonesa jest w ogólności problemem #P-trudnym (Kuperberg [247], Vertigan [455]), ale trywialnym przy znanych homologiach. (Patrz też fakt 5.2.21).

Kronheimer, Mrówka [246] pokazali:

Fakt 6.4.2 Zredukowana kohomologia Chowanowa wykrywa niewęzeł.

[6] Oznaczenie wzięte z pracy Viro, żywimy nadzieję, że nikt nie weźmie τ za liczbę kolorowań z rodziału drugiego. Poza tym, Viro pisze $\sigma(s)$ zamiast naszego $|s|$ oraz $|s|$ zamiast naszego $|sD|$. Ostrożność wskazana.

[7] Źródło: komentarze pod postem https://mathoverflow.net/a/232267

Niedowód. Dowód składa się z dwóch kroków. W pierwszym panowie pokazują, że istnieje ciąg spektralny zaczynający się od zredukowanej kohomologii Chowanowa, po którym następuje koniec: homologia zdefiniowana osobliwymi instantonami. Potem dowodzą, że ta homologia jest izomorficzna z instantonową homologią Floera szwowego dopełnienia węzła, o której wiadomo, że wykrywa niewęzeł. ■

III Rodziny węzłów

7 Wybrane rodziny węzłów 139
7.1 Warkocze 139
7.2 Supły 145
7.3 Precle 156
7.4 Węzły Lissajous 159
7.5 Węzły torusowe 162
7.6 Węzły satelitarne 168
7.7 Węzły hiperboliczne 171
7.8 Węzły plastrowe i taśmowe 178

7. Wybrane rodziny węzłów

Przyjęta przez nas definicja węzła czy splotu jest bardzo ogólna. O tak określonych obiektach można udowodnić niewiele twierdzeń. W dalszej części tego rozdziału będziemy rozpatrywali rozmaite klasy splotów. Jest rzeczą jasną, że im węższa klasa, tym więcej twierdzeń o jej elementach można udowodnić. Nakładane przez nas ograniczenia będą różnego charakteru. Zaczniemy od warkoczy oraz supłów, które stanowią cegiełki do budowy splotów. Z pojęciem supła mocno związane są sploty dwumostowe. Potem poznamy precle, sploty złożone z wielu warkoczy połączonych ze sobą oraz bardzo symetryczne węzły Lissajous. Później zbadamy węzły torusowe, klasę zrozumianą jako jedną z pierwszych, uogólnienie węzłów złożonych: węzły satelitarne i opowiemy krótko o węzłach hiperbolicznych. Na koniec przytoczymy kilka wyników czterowymiarowej teorii węzłów plastrowych i taśmowych.

Z chronologicznego punktu widzenia, pierwszą nieskończoną rodziną węzłów poddaną rygorystycznej klasyfikacji były węzły torusowe (Schreier [398]), a trzy dekady później też węzły dwumostowe (Schubert [402]). Supły czekały do lat siedemdziesiątych (Conway [94]).

7.1 Warkocze

Warkocze, a dokładniej grupa warkoczy, rozważane po raz pierwszy były niejawnie przez Hurwitza w pracy z 1891 roku o monodromii oraz jawnie przez Artina [15] w 1925 roku. Dla nas głównym źródłem wiedzy była wspaniała praca przeglądowa Birman, Brendle [33] poświęcona warkoczom, ale też notatki Gonzáleza-Menesesa [165] z kursu zorganizowanego w Pau.

Żałujemy, że nie odkryliśmy wcześniej przyjemnej w lekturze i pięknie ilustrowanej książki Kassela, Turajewa [210], którą polecamy każdemu, kto chce poświęcić się teorii warkoczy. Ta ostatnia pozycja obejmuje wszystko, o czym piszemy my, a dodatkowo też reprezentację Lawrence'a-Krammera-Bigelowa, makaron i widelce, algebry Iwahoriego-Heckego albo ślady Ocneanu oraz wiele innych tematów.

Definicja 7.1.1 — warkocz. O dwóch punktach $(d_1, t_1), (d_2, t_2)$ w walcu $B^2 \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^3$ powiemy, że łączący je odcinek jest malejący, jeśli $t_1 > t_2$. Łamana malejąca to taka, która jest złożona z odcinków malejących. Teoriomnogościową sumę parami rozłącznych łamanych malejących, które łączą zbiory $\{x_1, \ldots, x_n\} \times \{1\}$ oraz $\{x_1, \ldots, x_n\} \times \{0\}$, nazywamy warkoczem o n pasmach.

Poszczególne pasma warkocza możemy utożsamiać z wykresami pewnych (gładkich)

funkcji $f_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, jeśli zbiory $\{f_i(0) : 1 \leqslant i \leqslant n\} = \{f_i(1) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ są równe. Intuicyjnie, wartości $f_i(0)$ opisują początki, a $f_i(1)$ końce pasm.

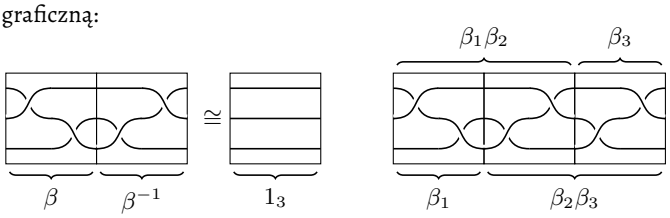
Wtedy dwa warkocze $f_1, f_2, \ldots, f_n$ oraz $g_1, g_2, \ldots, g_n$ uznajemy za równoważne, jeśli istnieje między nimi izotopia: funkcje ciągłe dwóch zmiennych $F_i(t,s)$ określone na zbiorze $[0,1]\times[0,1]$ takie, że $F_i(t,0) = f_i(t)$ oraz $F_i(t,1) = g_i(t)$. Przez analogię do węzłów można zdefiniować diagramy warkoczy jako cienie bez katastrof. Najczęściej rzutujemy prostopadle do odcinka $\{0\} \times [0,1]$.

Definicja 7.1.2 Określmy pomocniczo dwie kontrakcje $B^2 \times [0,1] \to B^2 \times [0,1]$:

$$\psi_1(d,t) = (d, t/2)$$
$$\psi_2(d,t) = (d, \frac{1}{2}(t+1))$$

Klasy abstrakcji warkoczy z mnożeniem danym wzorem $z_1 z_2 = \psi_1(z_1) \cup \psi_2(z_2)$ tworzą grupę warkoczy B_n. Jej elementem neutralnym jest warkocz $1_n = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_1\} \times [0,1]$.

Sprawdzenie aksjomatów grupy pozostawiamy Czytelnikowi, pozostawiając mu małą wskazówkę graficzną:

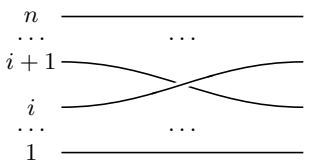


Fakt 7.1.3 Grupa warkoczy B_n ma prezentację

$$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} : \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, |i-j| \neq 1 \implies \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\}. \tag{7.1}$$

Pierwszy był sam Artin [15], wiele lat później Birman, Ko, Lee odkryli nową, „symetryczną" prezentację, ale dla oszczędności miejsca nawet ich nie cytujemy. Wraz z upływem czasu pojawiły się nowe dowody (w kolejności chronologicznej): Magnusa [281], Bohnenblusta [39], Chow [89], Fadella i van Buskirka [128], Foxa i Neuwirtha [140]. Patrz też do książki Birman [32] albo do [64, s. 164]. González-Meneses [165] przytacza ze szczegółami niektóre dowody (przez czesanie warkoczy, grupy podstawowe kompleksów komórkowych i inne).

Generatory σ_i posiadają nieskomplikowaną interpretację graficzną:



Jeśli zapomnimy, jak poszczególne pasma krzyżują się, każdy warkocz staje się permutacją zbioru n-elementowego. To odwzorowanie jest „na" i zgodne ze składaniem warkoczy, dlatego wyznacza homomorfizm $B_n \to S_n$. Jego jądro stanowi podgrupa warkoczy czystych, czyli takich, że początek i koniec każdego pasma znajdują się w tej samej pozycji. Patrz też [64, s. 170].

Fakt 7.1.4 Grupa warkoczy B_n jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1, 2$.

Dowód. Dla $n = 1$ grupa warkoczowa jest trywialna, dla $n = 2$ mamy $B_2 \cong \mathbb{Z}$. Załóżmy, że $n \geqslant 3$. Wtedy grupa symetrii S_n jest nieprzemienna, zatem grupa B_n także taka jest. ∎

Obrazem generatora $\sigma_i \in B_n$ jest transpozycja $(i, i+1) \in S_n$, co pozwala przepisać prezentację Artina grupy B_n do prezentacji Coxetera grupy symetrii:

$$S_n = \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \mid s_i^2 = 1, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, s_i s_j = s_j s_i \text{ dla } |i-j| \neq 1 \rangle \quad (7.2)$$

Fakt 7.1.5 Jeśli $n \geqslant 3$, to centrum grupy B_n jest generowane przez warkocz $(\prod_{i=1}^{n-1} \sigma_i)^2$.

Burde, Zieschang [64, s. 172] podają to samo stwierdzenie z n zamiast 2 w wykładniku.

Niedowód. Zazwyczaj wskazuje się dowód Garside'a [153], ale pierwszy dowód opublikował Chow [89], o czym Garside pisze w abstrakcie swojej pracy. ∎

Grupa B_3 jest izomorficzna z grupą podstawową trójlistnika (patrz przykład 6.1.3). Nie istnieje żaden węzeł, którego grupą podstawową byłaby jednak B_n dla $n \geqslant 4$: tam elementy σ_1, σ_n oraz generator centrum rozpinają grupę izomorficzną z $\mathbb{Z}^3$. Natomiast asferyczna, niezwarta 3-rozmaitość nie może mieć grupy podstawowej $\mathbb{Z}^3$. Musimy niestety pominąć czysto kohomologiczny dowód[1] faktu, ale zaiste prowadzi to do sprzeczności. (Patrz [64, s. 227]?).

7.1.1 Warkocze a sploty

Każdy warkocz można domknąć do węzła, łącząc ze sobą punkty $(x_i, 1)$ oraz $(x_i, 0)$ łamanymi, których rzuty do płaszczyzny diagramu nie przecinają się. Nie wiadomo, kto wymyślił operację domykania warkoczy, ale była ona z pewnością znana Alexanderowi: rozpatrywano je jeszcze przed samymi warkoczami.

Twierdzenie 7.1.6 — Alexander, 1923. Każdy splot powstaje przez domknięcie pewnego warkocza.

Niedowód. W kolejności chronologicznej: najpierw Alexander [11], a po blisko połowie wieku Morton [308], Yamada [470] (co daje łatwy do zaimplementowania program komputerowy) i Vogel [459] (ulepszający algorym Yamady). Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 24] też podają dowód tego twierdzenia. ∎

Manturow [286] pokazał, że od warkocza można wymagać kwazitoryczności (warkocz nazywamy torycznym, jeżeli jest postaci $(\sigma_1 \ldots \sigma_{p-1})^q$ oraz kwazitorycznym, jeżeli powstaje przez odwrócenie niektórych skrzyżowań z warkocza torycznego).

Twierdzenie 7.1.7 — Markow, 1936. Sploty powstałe przez domknięcie dwóch warkoczy są takie same wtedy i tylko wtedy, gdy jeden warkocz powstaje z drugiego przez ciąg

[1] Głodny wiedzy Czytelnik powinien odwiedzić https://math.stackexchange.com/a/2119984.

sprzężeń: $z_1 \mapsto z_2 z_1 z_2^{-1}$ oraz procesów Markowa, które zastępują n-warkocz β przez $(n+1)$-warkocz $\beta\sigma_n^{\pm 1}$.

Niedowód. Kompletny i godny naśladowania dowód znajduje się w trudno dostępnej książce Birman [32], więc warto sprawdzić inne, opublikowane później materiały: Morton [308] opisał przepiękną, a przy tym elementarną ideę „nitkowania", potem Traczyk [442] podał czysto kombinatoryczne, dwuwymiarowe uzasadnienie oparte o okręgi Seiferta, wreszcie mamy też nowe geometryczne rozumowanie Birman, Menasco [35] wykorzystujące foliacje. ■

Pierwsze sformułowanie twierdzenia pochodzące od Markowa [289] korzystało z trzech ruchów, jeden z nich stanowił uogólnienie II ruchu Reidemeistera. Weinberg [463] zauważył trzy lata później, że wystarczą dwa ruchy. Lambropoulou, Rourke [253] przedstawili wersję twierdzenia wymagającą tylko jednego „L-ruchu".

Historia twierdzenia Markowa jest raczej dramatyczna: Markow przedstawił swój dowód ustnie, ale nigdy go nie opublikował, zostawiając to zadanie swojemu uczniowi, Weinbergowi. Ten jednak został zabity podczas wojny, wkrótce po opublikowaniu pierwszej pracy na temat teorii węzłów i na dokładny dowód trzeba było czekać na Birman [32] blisko 40 lat. Dowód jest też u Burdego, Zieschanga [64, s. 184].

Nie znamy wielu twierdzeń o warkoczach i splotach, jakie powstają przez ich domykanie. Jones [203] podał bez dowodu:

Fakt 7.1.8 Niech $b \in B_n$ będzie słowem zapisanym na standardowych generatorach. Oznaczmy przez b_+, b_- nieznakowaną sumę dodatnich, ujemnych wykładników. Jeśli $b_+ - 3b_- \geqslant n$, to domknięcie warkocza b nie jest achiralne.

7.1.2 Reprezentacja Buraua

Niech M_n oznacza przez chwilę macierze $n \times n$ nad pierścieniem $\mathbb{Z}[t, 1/t]$. Werner Burau [59] wprowadził do matematyki reprezentację warkoczy $\varphi\colon B_n \to M_n$, nazywaną teraz jego nazwiskiem. Wyznaczona jest ona przez obrazy generatorów:

$$\varphi(\sigma_i) = I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1} \tag{7.3}$$

Bezpośredni rachunek dowodzi, że reprezentacja φ jest wierna dla $n \leqslant 2$. Magnus, Peluso [283] pokazali to samo dla $n = 3$, ale ich pracę czyta się tak trudno, że polecamy sięgnąć raczej po to, co napisała Birman [32, s. 129] albo Kassel, Turajew [210, s. 110]. Z drugiej strony Moody [303] używając całek po konturach i nie używając komputera odkrył, że reprezentacja nie jest wierna dla $n \geqslant 9$. Long, Paton [279] zauważyli związek między technikami Moody'ego, dualnością Poincarégo i formą Squiera, co pozwoliło ulepszyć wynik do $n \geqslant 6$. Ich konstrukcja korzysta z pewnej zamkniętej krzywej na sześciokrotnie przekłutym dysku o pewnych cechach homologicznych. Bigelow [29] pokazał u schyłku stulecia podobnymi metodami (ale już ze wsparciem komputera), że przypadek $n = 5$ też jest niewierny: jeśli

$$\psi_1 = \sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4^3\sigma_3\sigma_2, \tag{7.4}$$

$$\psi_2 = \sigma_4^{-1}\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1\sigma_4^5, \tag{7.5}$$

to komutator $[\psi_1^{-1}\sigma_4\psi_1, \psi_2^{-1}\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\sigma_4\psi_2]$ należy do jądra.

Czy reprezentacja Buraua dla B_4 jest wierna? Negatywna odpowiedź na to pytanie prawie na pewno prowadziłaby do nietrywialnego węzła, którego wielomianem HOMFLY jest 1, natomiast odpowiedź pozytywna raczej nie ma aż tak dramatycznych następstw.

Część informacji ukradliśmy z artykułu „Burau representation" https://w.wiki/7Wpz, inne można znaleźć u Burdego, Zieschanga [64, s. 181].

7.1.3 Grupy warkoczy w algebrze

Grupy B_n mogą być obiektem badań algebry bez związku z teorią węzłów.

Fakt 7.1.9 Grupa warkoczy B_n jest beztorsyjna dla każdego $n \geqslant 1$.

Istnieje wiele dowodów tego faktu: pierwszy korzystał z krótkich ciągów dokładnych (Fadell, Neuwirth [127]), później podano oparty o struktury Garside'a (Garside [153]), czysto teoriogrupowy pochodzi od Dyera [121]. My przedstawimy inne rozumowanie, opisując przy tym ciekawy sam w sobie porządek Dehornoya[2].Burde [60, s. 178] opisuje jeszcze inne, od Waldhausena.

Dowód. Mówimy, że grupa G jest lewo-porządkowalna, jeśli można wyposażyć ją w zupełny porządek $<$, niezmienniczy na mnożenie z lewej strony. To znaczy, dla każdych $a, b, c \in G$, z nierówności $a < b$ wynika $ca < cb$. Wtedy zbiór $P = \{g \in G \mid e < g\}$ nazywamy półgrupą elementów dodatnich. Łatwo widać, że G jest sumą rozłączną $P \sqcup \{e\} \sqcup P^{-1}$. Odwrotnie, każde takie rozbicie wyznacza porządek: wystarczy zdefiniować $a < b \iff a^{-1}b \in P$.

Dehornoy znalazł taki porządek dla grupy warkoczowej B_n w [111]. Za zbiór P elementów dodatnich wziął te słowa na standardowych generatorach, które dla pewnego i zawierają σ_i, ale nie σ_i^{-1} ani $\sigma_j^{\pm 1}$ dla $j < i$. Pokazanie, że P jest półgrupą nie sprawia trudności, ale tego, że B_n jest wtedy rozłączną sumą P, P^{-1} i trywialnego warkocza stanowi co najmniej nietrywialne zadanie.

Lewo-porządkowalna grupa jest beztorsyjna. Istotnie, ustalmy element $g \in G$ różny od elementu neutralnego. Bez straty ogólności niech $e < g$, przemnóżmy tę nierówność stronami przez g. Dostaniemy tak nową nierówność $g < g^2$. Powtarzając proces otrzymujemy łańcuch $e < g < g^2 < g^3 < \ldots$. Skoro $<$ jest porządkiem, nie jest możliwe by któryś z elementów g^n był neutralny. ∎

Dowód uproszczono: Fenn, Greene, Rolfsen, Rourke i Wiest [129] podali cztery lata później bezpośrednie geometryczne rozumowanie, które prowadzi do takiego samego porządku jak ten z pracy Dehornoya. Dziesięć lat później dostaliśmy jeszcze pracę Bacardita, Dicksa [17].

Fakt 7.1.10 Grupa warkoczy B_n jest grupą Hopfa dla każdego $n \geqslant 1$: nie jest izomorficzna z żadnym ze swoich właściwych ilorazów.

Dowód. Podręcznik [282] dobrze wyjaśnia różne idee stojące za dowodem, który podamy.

Mówimy, że grupa G jest rezydualnie skończona, jeśli przekrój jej podgrup skończonego indeksu jest trywialny. Łatwo widać, że własność ta przenosi się na wszystkie podgrupy grupy G. Baumslag zauważył, że jeśli grupa G jest skończenie generowana i rezydualnie skończona,

[2] W 1989 roku udowodniono, że pewien aksjomat teorii mnogości, I_3, dotyczący dużych liczb kardynalnych implikuje istnienie algebraicznej struktury zwanej acykliczną półką (nie mylić z naszymi półkami). To pociąga decydowalność problemu słowa dla prawa $x(yz) = (xy)(xz)$, coś co nie jest wprost związane z dużymi liczbami kardynalnymi. Dehornoy w 1992 roku podał przykład acyklicznej półki na grupie warkoczy B_∞.

to grupa jej automorfizmów Aut G jest rezydualnie skończona. Grupa $G = \mathbb{Z}^2$ spełnia te założenia. Wolna grupa F_2 jest podgrupą grupy automorfizmów $\mathbb{Z}^2$, na przykład

$$F_2 \simeq \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \operatorname{Aut} \mathbb{Z}^2. \tag{7.6}$$

Wszystkie grupy wolne F_n, $n \in \mathbb{N}$, są podgrupami grupy F_2, dlatego także są rezydualnie skończone, a z nimi grupa warkoczy, gdyż $B_n \subseteq \operatorname{Aut} F_n$.

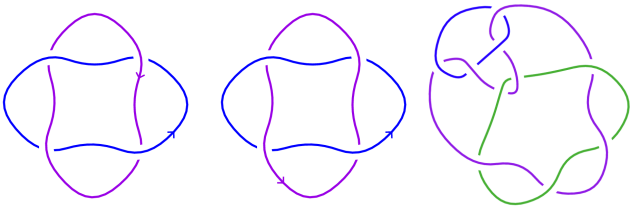
Malcew pokazał, że skończenie generowana i rezydualnie skończona grupa jest grupą Hopfa. Krótki dowód tego faktu można znaleźć w sekcji 6.5 książki Magnusa [282]. ■

Czy grupy warkoczy są liniowe (podgrupami pewnej pełnej grupy liniowej $GL(m, K)$)? Przez długi czas był to problem otwarty, potem Krammer [242] pokazał, że B_4 jest liniowa, następnie metodami topologicznymi Bigelow [30] dowiódł, że liniowe są wszystkie grupy B_n, a wkrótce po tym Krammer [243] uogólnił swoje algebraiczne rozumowanie też do wszystkich grup B_n.

7.1.4 Liczba warkoczowa

Definicja 7.1.11 Niech L będzie splotem. Najmniejszą liczbę pasm, na których można zapleść warkocz b, którego domknięciem jest splot L, nazywamy liczbą warkoczową splotu L.

Tylko jeden węzeł ma liczbę warkoczową 1, jest to niewęzeł. Dwuwarkoczowe są dokładnie węzły torusowe typu $(2, n)$ dla $|n| \geqslant 3$. Węzły spełniające $\mathrm{b}(K) = 3$ nie zostały jeszcze sklasyfikowane. Liczba warkoczowa splotu zależy od orientacji ogniw (patrz rysunek poniżej) i trudno wyznacza się w ogólnym przypadku. Znamy ją między innymi dla węzłów torusowych (fakt 7.5.15).



(a) $\mathrm{b}(L4a_{1,0}) = 3$ (b) $\mathrm{b}(L4a_{1,1}) = 2$ (c) $L10a_{153}$

Rysunek 7.1: Liczba warkoczowa splotu zależy od orientacji

Według bazy danych LinkInfo [278] istnieją 1424 niezorientowane sploty pierwsze o indeksie skrzyżowaniowym 11 lub mniejszym. Spośród nich, 622 sploty mają tę samą liczbę warkoczową niezależnie od tego, jak zorientowane są ich ogniwa. Z drugiej strony dokładnie jeden splot z bazy LinkInfo, $L10a_{153}$, może mieć aż cztery różne liczby warkoczowe: 3, 4, 5 lub 6.

Fakt 7.1.12 Węzeł o n skrzyżowaniach można zapleść na $n-1$ pasmach: $\operatorname{cr} K \geqslant 1 + \mathrm{b}\, K$.

Powyższe ograniczenie nie jest zbyt użyteczne, równość mamy jedynie dla trójlistnika i ósemki. Ohyama [345] pokazał:

Fakt 7.1.13 Niech L będzie nierozszczepialnym splotem. Wtedy $\operatorname{cr} L \geqslant 2\,\mathrm{b}\, L - 2$.

Dowód korzysta z grafu Seiferta splotu. Wśród pierwszych węzłów do 10 skrzyżowań mamy równość dziesięć razy: dla $4_1, 6_1, 8_1, 8_3, 8_{12}, 10_1, 10_3, 10_{13}, 10_{35}, 10_{58}$.

Fakt 7.1.14 — nierówność Mortona-Franksa-Williamsa. Niech L będzie zorientowanym splotem, zaś $\operatorname{span}_\alpha$ różnicą między największym i najmniejszym stopniem zmiennej α wielomianu HOMFLY zmiennych α, z. Wtedy

$$\mathrm{b}\, L \geqslant 1 + \frac{1}{2} \operatorname{span}_\alpha P(\alpha, z). \tag{7.7}$$

Nierówność jest ostra dla wszystkich pierwszych węzłów do 10 skrzyżowań poza $9_{42}, 9_{49}, 10_{132}, 10_{150}$ oraz 10_{156}. Dowód podali niezależnie Franks, Williams [142] i Morton [309].

Wielomian Alexandera wykrywa czasami węzły, których nie otrzyma się przez domykanie „małych" warkoczy. Przytoczone tu wyniki pochodzą z pracy Jonesa [203], gdzie nie ma jednak ich dowodów.

Fakt 7.1.15 Jeśli $|\Delta_K(i)| > 3$, to węzeł K nie jest domknięciem 3-warkocza.

Ta implikacja, [203, wniosek 23], jest skuteczna przy 43 z 59 węzłów pierwszych o mniej niż 10 skrzyżowaniach. Jones [203, wniosek 24] zasugerował, że domknięcia 4-warkoczy spełniają podobną nierówność $|\Delta(\exp(2\pi i/5))| \leqslant 13/2$, ale Stojmenow [419] odkrył po wielu latach, dlaczego nikt nigdy nie podał dowodu tego faktu. Węzeł 13_{9221} ma liczbę warkoczową 4, jego wielomian Alexandera przyjmuje wartość $\Delta(\omega_5) = 19\sqrt{5} - 49 \approx -6.51$.

Udało mu się za to udowodnić słabszą implikację ($6 + 2\sqrt{5} \approx 10.47$):

Fakt 7.1.16 Jeśli $|\Delta_K(\exp(2\pi i/5))| > 6 + 2\sqrt{5}$, to węzeł K nie jest domknięciem 4-warkocza.

Prawdopodobnie nie istnieją podobne warunki dla 5-warkoczy.

7.2 Supły

Na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych Conway szukał sposobu na zbudowanie kompletnej tablicy węzłów. Niezmienniki znane w tym czasie nie były dostatecznie mocne, by sprostać temu wyzwaniu. Conway wprowadził pojęcie supła i chociaż wszystkich węzłów nie można z nich uzyskać, teoria została pchnięta do przodu. Supły stanowią budulec splotów takich jak na przykład precle z definicji 7.3.6.

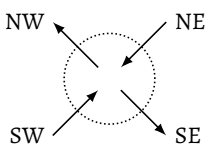
Sekcja oparta jest na podręczniku Murasugiego [328] i pracach Conwaya [94], Kauffmana, Goldmana [162], Kauffmana, Lambropoulou [216], a także Schuberta [402], ale nie przeglądowej książce Kawauchiego [219, s. 34-36].

Supły występują także w polskojęzycznym artykule Janiak-Osajcy, Pogody [199], ale ten zawiera nieprzyjemną pułapkę: wprowadza notację sprzeczną z powszechnie akceptowaną.

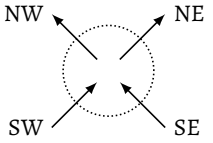
Definicja 7.2.1 — supeł. Zawarty w kole fragment diagramu splotu o dwóch łukach wyjściowych oraz dwóch wejściowych, nazywamy supłem.

Słowo „supeł" zaproponowała Haseman, już ona rysowała supły wewnątrz pomocniczego okręgu, który tnie diagram w czterech punktach.

Istnieją dwa rodzaje supłów:



(a) supeł naprzemienny



(b) supeł sąsiadujący

Podobnie jak dla węzłów, pojawia się naturalne pytanie o równoważność dwóch supłów. Jest tak wtedy, gdy istnieje homeomorfizm kuli na siebie, który przekształca jeden supeł na drugi, ale nie rusza sfery otaczającej. Dla diagramów odpowiada to ruchom Reidemeistera, nie mamy jednak prawa opuszczać kuli zawierającej supeł.

Dużo dokładniej mówi o tym Turajew [449]:

Fakt 7.2.2 Oznaczmy przez OTa kategorię zorientowanych supłów. Jej obiektami są skończone ciągi złożone z ± 1, razem z ciągiem pustym. Morfizm ciągu $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ w ciąg $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_l)$ jest klasą izotopii zorientowanego (k, l)-supła L tak, że źródłem L jest ε, zaś celem ν. Na przykład supły $\curvearrowright$, $\curvearrowleft$ oraz X_+ opisane są przez morfizmy $\varnothing \to (-1, 1)$, $\varnothing \to (1, -1)$ oraz $(1, 1) \to (1, 1)$. Składanie morfizmów odpowiada mnożeniu supłów.

Wprowadźmy iloczyn tensorowy $\otimes$. Iloczynem obiektów ε, ν (które znaczą to, co wcześniej) jest obiekt $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \nu_1, \ldots, \nu_l)$, zaś iloczyn tensorowy morfizmów będzie iloczynem tensorowym splotów i łatwo widać, że $(OTa, \otimes, \varnothing)$ jest ściśle monoidalną kategorią (cokolwiek to znaczy).

Zdefiniujmy cztery słowa:

$$A = (\downarrow\downarrow\curvearrowright) \circ (\downarrow\downarrow\uparrow\curvearrowright\downarrow) \circ (\downarrow\downarrow X_\pm \downarrow\downarrow) \circ (\downarrow \smile \uparrow\downarrow\downarrow) \circ (\smile \downarrow\downarrow) \tag{7.8}$$

$$B = (\curvearrowleft\downarrow\downarrow) \circ (\downarrow\curvearrowleft\uparrow\downarrow\downarrow) \circ (\downarrow\downarrow X_\pm \downarrow\downarrow) \circ (\downarrow\downarrow\uparrow \frown \downarrow) \circ (\downarrow\downarrow \frown) \tag{7.9}$$

$$T = (\curvearrowleft\uparrow\downarrow) \circ (\downarrow X_- \downarrow) \circ (\downarrow\uparrow \frown) \tag{7.10}$$

$$Y = (\uparrow\downarrow\curvearrowright) \circ (\downarrow X_+ \downarrow) \circ (\smile \uparrow\downarrow) \tag{7.11}$$

Kategorię OTa można przedstawić przez morfizmy $\smile, \frown, \curvearrowright, \curvearrowleft, X_+, X_-$ (generatory)

oraz relacje:

$$(\curvearrowright\uparrow)\circ(\uparrow\smile) = \uparrow = (\uparrow\curvearrowleft)\circ(\smile\uparrow) \tag{7.12}$$

$$(\curvearrowleft\downarrow)\circ(\downarrow\frown) = \downarrow = (\downarrow\curvearrowright)\circ(\frown\downarrow) \tag{7.13}$$

$$A = B \tag{7.14}$$

$$X_+\circ X_- = X_-\circ X_+ = \uparrow\uparrow \tag{7.15}$$

$$(X_+\uparrow)\circ(\uparrow X_-)\circ(X_+\uparrow) = (\uparrow X_+)\circ(X_+\uparrow)\circ(\uparrow X_+) \tag{7.16}$$

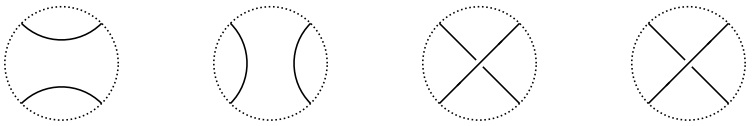
$$(\uparrow\curvearrowright)\circ(X_\pm\downarrow)\circ(\uparrow\smile) = \uparrow \tag{7.17}$$

$$Y\circ T = \downarrow\uparrow, \quad T\circ Y = \uparrow\downarrow \tag{7.18}$$

Dowód. Dowód twierdzenia oraz graficzne przedstawienie relacji z kategorii OTa zawiera praca Turajewa [449]. Wszystkie relacje odpowiadają ruchom Reidemeistera. Trzecie od końca równanie to geometryczny wariant równania Yanga-Baxtera.

Patrz też [87, s. 29-30] (Czmutow, Dużin, Mostovoy przygotowali tam śliczne rysunki) albo [397, s. 31] (gdzie Schieber przedstawił ruchy Reidemeistera i cięte diagramy). ■

Wszystkich supłów jest bardzo dużo, więc ograniczymy się do końca rozdziału do pewnej ich regularnej rodziny. Oto cztery podstawowe supły:



(a) (0) (b) $(\infty) = (0,0)$ (c) (-1) (d) $(+1)$

Definicja 7.2.3 Supły powstające z (0) lub (∞) przez homeomorfizm kuli na siebie permutujący wejścia i wyjścia nazywamy wymiernymi.

Pokażemy teraz, jak zamienić dowolny skończony ciąg liczb całkowitych w supeł, jako że jest to prostsze od procesu odwrotnego. Nazwijmy jednak najpierw dwa rodzaje skrętów:



(a) skręty prawe (b) skręty lewe

Mając ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ wykonujemy naprzemiennie obroty półsferą dolną (SW–SE, takie nazywamy pionowymi) oraz prawą (SW–NW, a takie poziomymi) tak, by ostatni był obrót poziomy. Oto reguła zgodnie z którą wybieramy kierunek obrotów. Podczas pionowych obrotów, prawy skręt jest dodatni, zaś lewy ujemny. Podczas poziomych, zamieniamy znaki:

prawy odpowiada ujemnym wyrazom ciągu, lewy dodatnim. Wreszcie, jeżeli n jest nieparzyste, zaczynamy od supła $T(0)$, w przeciwnym razie od supła $T(0,0)$.

Różnym ciągom mogą odpowiadać te same supły, na przykład $T(-2,3,3) = T(3,-2)$, więc notacja nie jest jednoznaczna, ale to nic złego. Każdemu supłowi przypiszmy pewną liczbę wymierną, według przepisu:

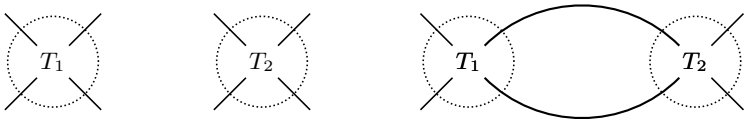
$$T(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto a_n + \cfrac{1}{\ldots + 1/a_1} = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{7.19}$$

Fakt 7.2.4 Istnieje bijekcja między supłami wymiernymi oraz ułamkami łańcuchowymi.

Niedowód. Praca Conwaya [94, s. 331-332]. ■

Fakt 7.2.5 — ćwiczenie 9.2.6 w [328]. Niech $T(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ będzie supłem różnym od 0 oraz ∞. Wtedy bez straty ogólności można założyć, że wszystkie liczby a_i są tego samego znaku.

Z każdym supłem T związane jest jego odbicie $\overline{T}$, obraz wyjściowego przez symetrię względem prostej $y = -x$. Mając dwa supły obok siebie, można dokonać ich sklejenia wzdłuż połówek kul, w których leżą:

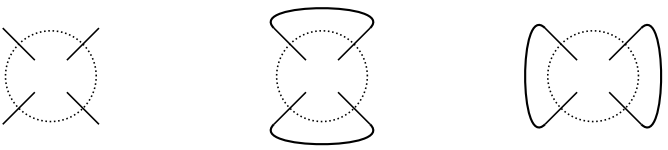


(a) jakiś supeł (b) jakiś inny supeł (c) suma tych supłów

Oznaczmy tak otrzymany splot przez $T_1 + T_2$. Niektórzy definiują dalsze działania, jak produkt: $T_1 \cdot T_2 = \overline{T}_1 + T_2$ czy rozgałęzienie, $\overline{T}_1 + \overline{T}_2$. Rodzina supłów wymiernych jest zamknięta na branie produktów, ale nie sum. Wprowadzamy więc następującą, ogólniejszą definicję. Supeł będący skończoną sumą supłów wymiernych, ich luster, odbić lub odbić luster nazywamy algebraicznym.

Conway korzystając ze skończonej listy „wielościanów podstawowych" (pewnych grafów planarnych) był w stanie zakodować wszystkie węzły o małej liczbie skrzyżowań. Ale ponieważ notacja ta nie jest uniwersalna – im więcej skrzyżowań, tym więcej wielościanów potrzeba, by opisać wszystkie węzły – nie opiszemy, jak działa.

Przez zszycie par łuków wejściowych (lub wyjściowych) zamieniamy supły w węzły:



(a) supeł T (b) licznik, $N(T)$ (c) mianownik, $D(T)$

Oznaczenia $N(T)$ oraz $D(T)$ pochodzą od angielskich słów *numerator*, *denominator*. Być może nie jest jasne, dlaczego terminy stosowane zazwyczaj do opisu ułamków stosujemy wobec diagramów splotów. Nazewnictwo nie jest przypadkowe.

Fakt 7.2.6 Ułamek supła zadany wzorem

$$F(A) = \frac{\nabla_{N(A)}(z)}{\nabla_{D(A)}(z)} \tag{7.20}$$

spełnia zależność $F(A+B) = F(A) + F(B)$.

Dowód. Praca [94] Conwaya. ■

Praca [94] zawiera jeszcze jeden ciekawy rezultat, uogólniony przez Lickorisha i Milletta w [264, fakt 12]. Używamy tu wersji wielomianu HOMFLY o zmiennych l, m.

Fakt 7.2.7 Niech A, B będą supłami, zaś T_n (odpowiednio: T_d) wielomianem HOMFLY licznika (mianownika) supła T. Wtedy

$$(\mu^2 - 1)(A+B)_n = \mu(A_n B_n + A_d B_d) - (A_n B_d + A_d B_n), \tag{7.21}$$

gdzie $\mu = -(l + 1/l)/m$.

7.2.1 Sploty o dwóch mostach

Dokładnie jeden węzeł jest jednomostowy, niewęzeł. Rodzina splotów dwumostowych jest bardziej skomplikowana. Mają one co najwyżej dwa ogniwa i są odwracalne [64, s. 211]. Pierwsi studiowali je Bankwitz, Schumann [20] w 1934 roku jako *Viergeflechte*; wyjaśnienie czemu podają Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 25, 213]. Współcześnie dominuje jednak nazwa „*sploty wymierne*", ponieważ Conway pokazał, jak można je otrzymać z domknięć wymiernych supłów.

Więcej informacji podaje Kawauchi [219, s. 21-26].

Fakt 7.2.8 Sploty dwumostowe są pierwsze.

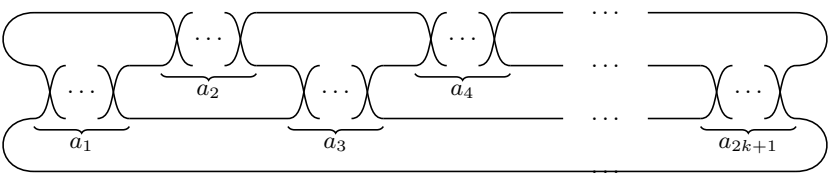
Dowód. Prosty wniosek z tego, że liczba mostowa prawie jest addytywna (fakt 3.3.3). Można podać dowód nie odwołujący się do tak „mocnego" wyniku, patrz [64, s. 100]. ■

Wniosek 7.2.9 Pierwsze węzły dwu- lub trzymostowe są albo torusowe, albo hiperboliczne.

Niedowód. Kawauchi [219, s. 130] wnioskuje to z twierdzenia, którego nie znamy. ■

Fakt 7.2.10 Następujące warunki są równoważne: splot L jest dwumostowy; splot L jest mianownikiem $D(T)$ pewnego supła wymiernego T.

Dowód tego stwierdzenia znaleźć można na przykład w książce [328], strony 183-187. Wynika z niego, że każdy splot dwumostowy można przedstawić następującym diagramem:



Oto reguła, zgodnie z którą wybieramy znaki liczb a_i: jeśli i jest nieparzyste, prawy skręt jest dodatni, jeśli parzyste – lewy jest dodatni. Sam diagram oznaczamy $C(a_1, \ldots, a_{2k+1})$ i nazywamy postacią normalną Conwaya.

Fakt 7.2.11 Sploty dwumostowe są alternujące.

Dowód. Goodrick w [166] podał diagramatyczny dowód, gdzie ciąg ruchów zmienia diagram splotu dwumostowego w alternujący. Wynika to też z faktu 7.2.5. ■

Przez analogię do supłów, definiujemy ułamek łańcuchowy (postać normalną Conwaya, ale mamy jeszcze postać Schuberta – patrz [219, s. 21]):

$$C(a_1, \ldots, a_{2k+1}) \mapsto a_1 + \cfrac{1}{a_2 + 1/\ldots} = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{7.22}$$

Zauważmy, że wartość bezwzględna ułamka α/β zawsze przekracza 1 i odwrotnie, każdy taki ułamek pochodzi od pewnego węzła dwumostowego. Parę względnie pierwszych liczb (α, β) nazywamy typem węzła dwumostowego; α jest torsją, zaś β indeksem skrzyżowaniowym ([64, s. 210]).

Fakt 7.2.12 Dwumostowe sploty typów (α, β) oraz (α', β') są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta^{\pm 1} \equiv \beta' \pmod{2\alpha} \end{cases} \tag{7.23}$$

Gdyby rozpatrywać niezorientowane sploty, drugie przystawanie upraszcza się: wystarczy, że będzie zachodzić modulo α.

Niedowód. Słabsza wersja twierdzenia bierze się z klasyfikacji przestrzeni soczewkowych oraz tego, że podwójnie rozgałęziona przestrzeń nakryciowa dwumostowego splotu typu (α, β) to przestrzeń soczewkowa typu (α, β). Burde, Zieschang [64, s. 212] wspominają tu prace Reidemeistera [380], Brody'ego [56] oraz Turajewa [450].

Dowód mocnej wersji znajduje się u Schuberta [402], a zapewne także Murasugiego [328, s. 158]. ■

Fakt 7.2.13 Dwumostowy splot typu (α, β) jest achiralny dokładnie wtedy i tylko wtedy,

gdy

$$\beta^2 \equiv -1 \mod \alpha. \tag{7.24}$$

Niedowód. Lustrem splotu typu (α, β) jest splot typu $(\alpha, -\beta)$, to oraz fakt 7.2.12 kończy dowód. Explicite pisze o tym Kawauchi [219, s. 24]. ■

Fakt 7.2.14 Niech L będzie dwumostowym splotem typu (α, β). Wtedy $\det L = \alpha$.

Wynika stąd, że wyznacznik nie wystarcza do odróżniania splotów dwumostowych.

Dowód. https://math.stackexchange.com/questions/3327846/. ■

Niech A, B będą supłami. Wiemy, że suma $A + B$ nie musi być supłem, zaś $D(A + B)$ niekoniecznie jest splotem dwumostowym. Pomimo to, splot $N(A + B)$ jest dwumostowy, potrafimy nawet powiedzieć, jaki ma wyznacznik:

Fakt 7.2.15 Niech A, B będą supłami, którym odpowiadają skrócone ułamki p/q oraz r/s. Wtedy splot $L = N(A+B)$ jest dwumostowy, typu (α, β) i ma wyznacznik $\alpha = |ps+qr|$.

Murasugi [328, twierdzenie 9.3.5] twierdzi, że dowód znajduje się u Ernsta, Sumnersa [126, lemat 2.1].

Fakt 7.2.16 Niech b będzie dowolną liczbą całkowitą. Wtedy następujące sploty są tego samego typu:

$$\begin{aligned}
N(T(a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1})) &\approx N(T(a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1}, b, 0)) && (7.25)\\
&\approx D(T(-a_1, -a_2, \ldots, -a_{2k+1}, b)) && (7.26)\\
&\approx C(a_1, a_2, \ldots, a_{2k} - 1, 1). && (7.27)\\
N(T(a_1, a_2, \ldots, a_{2k})) &\approx D(T(-a_1, -a_2, \ldots, -a_{2k}, b)) && (7.28)\\
&\approx C(a_1, a_2, \ldots, a_{2k} - 1, 1). && (7.29)\\
D(T(a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1})) &\approx D(T(a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, 0)) && (7.30)\\
&\approx C(1, a_1 - 1, a_2, \ldots, a_{2k}). && (7.31)\\
D(T(a_1, a_2, \ldots, a_{2k})) &\approx D(T(a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}, 0)) && (7.32)\\
&\approx C(a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}). && (7.33)
\end{aligned}$$

Dowód. [328, fakt 9.3.4] ■

Fakt 7.2.17 Rozpatrzmy węzeł dwumostowy typu (α, β), gdzie $0 < \beta < \alpha$ i β jest nieparzyste. Niech r_k będzie resztą z dzielenia $k\beta$ przez 2α leżącą w przedziale $(-\alpha, \alpha)$ dla $k = 0, 1, \ldots, \alpha - 1$. Różnica między ilością dodatnich reszt i ujemnych reszt to sygnatura węzła.

Wygląda na to, że jedynym niewyznaczonym do końca klasycznym niezmiennikiem jest liczba gordyjska.

Mimo to potrafimy dokładnie zliczyć węzły dwumostowe (czyli wymierne) dla danej liczby skrzyżowań – ciąg A018240 w OEIS. Znamy też, ile spośród nich ma liczbę gordyjską równą 1 (ciąg A078477) oraz ile ma sygnaturę zero (ciąg A078478). Trzy ostatnie ciągi spełniają proste rekurencje lub ich funkcje tworzące mają ładną, zwartą postać.

7.2.2 Mutanty i mutacje

Na zakończenie wspomnimy o mutacjach.

Definicja 7.2.18 — mutacja. Półobrót supła względem osi poziomej, pionowej albo też prostopadłej do płaszczyzny, w jakiej leży diagram, nazywamy mutacją. W razie potrzeby zmieniamy orientację supła na przeciwną.

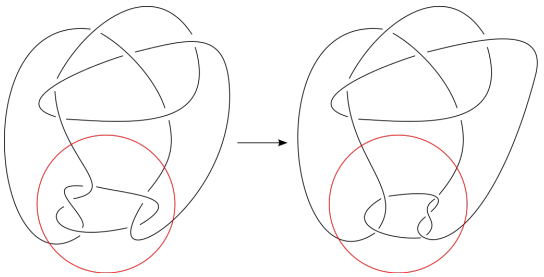
Definicja 7.2.19 — mutant. Niech K będzie węzłem. Węzeł, który powstaje przez ciąg mutacji na węźle K, nazywamy mutantem węzła K.

Mutacja węzła o co najwyżej dziesięciu skrzyżowaniach nie zmienia jego klasy abstrakcji. Najprostszą, a zarazem najsłynniejszą parą różnych od siebie mutantów stanowią węzeł Conwaya $11n_{34}$ oraz Kinoshity-Terasakiego $11n_{42}$.

Conway zauważył podczas klasyfikacji niealternujących węzłów, że tylko one posiadają trywialny wielomian Alexandera. Mają też taki sam wielomian Jonesa,

$$V(t) = t^6 - 2t^5 + 2t^4 - 2t^3 + t^2 + 2t^{-1} - 2t^{-2} + 2t^{-3} - t^{-4}. \tag{7.34}$$

Kinoshita, Terasaka [225] zdefiniowali nieskończoną rodzinę węzłów, której pierwszym wyrazem jest węzeł $11n_{42}$ (i wszystkie mają trywialny wielomian Alexandera). Dowód tego, że $11n_{34}$ oraz $11n_{42}$ są różne, jako pierwszy podał prawdopodobnie Riley w 1971 roku [381]: wykorzystał on homomorfizmy z grupy węzła w $PSL(2,7)$. Genusy, odpowiednio: 3 i 2, wyznaczył Gabai piętnaście lat później w [149], używał foliacji.



Rysunek 7.7: Węzły $11n_{42}$ oraz $11n_{34}$. Grafika Sørena Jørgensena, dostępna na licencji CC BY-SA 3.0 pod adresem `https://en.wikipedia.org/wiki/File:Knudemutation.svg`.

Niedawno Stojmenow podjął się systematycznie szukania mutantów wśród węzłów o mniej niż 19 skrzyżowaniach (praca [426] z 2010 roku). Początkowo pracował sam, badając pewne subtelne przykłady postanowił uwikłać w swój projekt Toshifumiego Tanakę, a później także Daniela Mateię. Praca [426] jest kontynuacją artykułu, który napisali wspólnymi siłami.

I tak na stronie 531 można przeczytać, że „niezmienniki Wasiljewa co najwyżej 8. stopnia nie rozróżniają mutantów węzłów [85]", ja tego nie widzę. Mniej więcej sześć lat później wynik

poprawił J. Murakami (nie mylić z H. Murakamim!) do 10. stopnia w niezindeksowanej pracy [317]. W międzyczasie Cromwell, Morton znaleźli niezmiennik stopnia 11., który odróżnia węzły Conwaya oraz Kinoshity-Terasakiego; patrz [310].

Mutant węzła złożonego także jest złożony, co więcej istnieje bijekcja między czynnikami w ich rozkładach na węzły pierwsze Ruberman – [389]. Dzięki temu możemy bez straty ogólności założyć, że badamy tylko węzły pierwsze, niestety wciąż nie jest znana ogólna procedura pozwalająca wyliczyć wszystkie mutanty danego węzła.

Zaraz po rewolucji, jaką w latach 80. wywołała relacja kłębiasta, Ewing napisał z Millettem komputerowy program w języku C, który wyjątkowo szybko znajdował wielomiany HOMFLY oraz Kauffmana zadanego węzła. Nawet dziś program ten jest w stanie uporać się z węzłami, z którymi nie radzą sobie inne narzędzia. Autorzy nie wiedzieli wtedy, że ktoś jeszcze będzie z nich korzystać w przyszłości, dlatego poczynili w kodzie liczne optymalizacje dla stacji roboczej Sun, jaką wtedy dysponowali. Dzisiaj okazuje się, że dla węzłów o większej liczbie skrzyżowań program często kończy swoje działanie zrzutem pamięci, wpada w pętlę bez wyjścia albo zwraca niepoprawny wynik (składniki wielomianu Kauffmana są postaci $a^m z^n$, gdzie $m+n$ jest nieparzyste). Stojmenow korzystał z tych programów podczas tablicowania mutantów. Jak postępował?

1. podzielił węzły na grupy o tej samej objętości, wielomianie Jonesa oraz Alexandera;
2. w każdej z grup szukał ciągu mutacji pomiędzy diagramami minimalnymi;
3. tam, gdzie nie udało się znaleźć mutantów, liczył 2-kablowy wielomian HOMFLY;
4. jeśli wielomian był taki sam, szukał ciągu mutacji między nieminimalnymi diagramami do 18 skrzyżowań;
5. wreszcie pozostałe grupy zostały potraktowane reprezentacjami grupy podstawowej dwukrotnego nakrycia.

Podsumowanie jego pracy zawiera tabela:

skrzyżowania	11	12	13	14	15
pary	16	70	703	3917	24884
trójki		5	38	233	1000
czwórki			32	262	2909
szóstki			1	17	172
ósemki				6	84
łącznie	16	75	774	4435	29049

Tabela 7.1: Liczba grup mutantów wśród pierwszych węzłów do 15 skrzyżowań

Rozróżnianie mutantów

Żaden wielomianowy niezmiennik opisany w tej książce nie potrafi odróżnić od siebie węzłów $11n_{34}$ oraz $11n_{42}$. Okazuje się, że niewielomianowe niezmienniki też często są bezradne.

Fakt 7.2.20 Mutacja węzła nie zmienia jego wielomianu Alexandera.

Dowód. Stojmenow, Tanaka [428, s. 1] piszą, że to proste ćwiczenie teorii kłębiastej, oraz że rozumowanie łatwo przenosi się na odkryte później wielomiany Jonesa, HOMFLY, BLM/Ho, Kauffmana. ■

Warto przytoczyć teraz obserwację 3.8.2 z [219, s. 43] pochodzącą tak naprawdę z pracy Viro [456]: niech sploty L_1, L_2 będą mutantami, wtedy podwójne przestrzenie nakryciowe nad S^3 rozgałęzione wzdłuż L_1 albo L_2 są homeomorficzne z zachowaniem orientacji. Cooper [95] zauważył, że macierze Seiferta mutantów są S-równoważne. To tłumaczy czemu większość niezmienników nie radzi sobie z odróżnianiem mutantów.

Wzór kablowy[3] [261, tw. 6.15] pokazuje, że wielomian Alexandera nie odróżnia satelitów zmutowanych węzłów. Wielomian Jonesa nie spełnia żadnego wzoru kablowego (gdyż czasami odróżnia kable węzłów o tym samym wielomianie), ale...

Fakt 7.2.21 Mutacja węzła nie zmienia jego kablowego wielomianu Jonesa.

Dowód. Morton, Traczyk [311]. ■

Praca [311] wspomina jeszcze, że to samo jest prawdą także dla „wielomianu Jonesa dwóch zmiennych" (HOMFLY) i 2-kabli, ale nie dla dowolnych satelitów. Fakt, że wielomian HOMFLY (a także Kauffmana) nie odróżniają 2-satelitów mutantów, odkryto rok wcześniej:

Fakt 7.2.22 Mutacja węzła nie zmienia jego 2-kablowego wielomianu HOMFLY.

Dowód. Lickorish, Lipson [262], później też Przytycki [365]. ■

Lepiej jest z 3-kablami: wielomian HOMFLY odróżnia tak węzły Kinoshity-Terasakiego i Conwaya, ale wymaga takiej ilości rachunków, że mało komu chce się je przeprowadzać dla innych węzłów.

Fakt 7.2.23 Mutacja węzła nie zmienia jego (2-?)kablowego wielomianu Kauffmana.

Dowód. Lickorish, Lipson [262]. ■

Morton w recenzji pracy Lickorisha, Lipsona wspomina, że dla satelitów owijających się więcej niż 2 razy to nie jest prawda, jak później odkryto.

Fakt 7.2.24 Mutacja węzła nie zmienia jego wielomianu BLM/Ho.

Dowód. [428], choć nie wiemy, gdzie dokładnie. ■

[3] Niech T będzie trywialnym torusem, zawierającym węzeł K, zaś $e\colon T \to S^3$ włożeniem T na otoczenie węzła C tak, że e przenosi równoleżnik T na równoleżnik C. Wtedy $\Delta_{eK}(t) = \Delta_K(t)\Delta_C(t^n)$.

Fakt 7.2.25 Mutacja węzła nie zmienia jego sygnatury Levine'a-Tristrama.

Dowód. Cooper, Lickorish w [96] podają klasyczny dowód, że mutacja zachowuje wielomian Alexandera, oparty o macierz Seiferta. Wiedząc, jak wygląda ta macierz, autorzy wyciągają wniosek, że sygnatura splotów (!) w homologicznej 3-sferze też jest zachowywana. ■

Fakt 7.2.26 Mutacja węzła nie zmienia jego symplicjalnej objętości Gromowa.

Dowód. Ruberman [389]. ■

Fakt 7.2.27 Mutacja węzła nie zmienia jego instanton homologii Floera.

Dowód. Jeszcze raz Ruberman [390]. ■

Fakt 7.2.28 Mutacja węzła nie zmienia jego niezmienników Wittena.

Niedowód. Rong [387]: niech L będzie obramowanym splotem w 3-rozmaitości M, zaś $F \subseteq M$ dwustronną powierzchnią, tnącą splot w 0, 1 lub 4 (transwersalnie) punktach, o genusie $g = 0$, 1 lub 2, wtedy rozcięcie M wzdłuż F i sklejenie po obrocie o 180 stopni daje parę (M^τ, K^τ), która ma ten sam niezmiennik Wittena w $\mathrm{SU}(2)$ jak wyjściowa para (M, K). ■

Fakt 7.2.29 Mutacja węzła nie zmienia jego niezmienników Cassona.

Celowo nie podajemy definicji tego niezmiennika. Nieformalnie, zlicza on co drugą klasę sprzężoności reprezentacji grupy podstawowej homologicznej 3-sfery w grupie $SU(2)$.

Dowód. Kirk [227]. ■

Hipoteza 7.2.30. *Mutacja węzła nie zmienia jego liczby gordyjskiej.*

Jak czytamy w [226, problem 1.69], przypuszczenie to jest bardzo trudne do udowodnienia, bo wynikałaby z niego bardzo stara hipoteza 3.2.7, że liczba gordyjska splotów jest addytywna. Przytoczymy dwa częściowe wyniki. Najpierw Rolfsen [386] zauważył, że jedynym mutantem niewęzła jest sam niewęzeł. Dekadę później Gordon, Luecke [171] pokazali, iż klasa węzłów 1-gordyjskich jest zamknięta na przeprowadzanie mutacji. (Ohtsuki [344, problem 12.15] powtarza hipotezę.)

Fakt 7.2.31 Niech D będzie alternującym diagramem. Wtedy każdy mutant D też jest alternujący.

Wśród niezmienników, które mutacja czasami zmienia, znajduje się genus plastrowy:

Fakt 7.2.32 Niech m, n będą nieujemnymi liczbami całkowitymi. Wtedy istnieje węzeł K o genusie plastrowym równym m, którego pewien mutant ma genus plastrowy równy n.

Stanowi to uogólnienie obserwacji Livingstona [273], że istnieją mutanty o różnym genusie plastrowym.

Dowód. Kim, Livingston w [224]. ■

Zbiór problemów niskowymiarowej topologii opublikowany przez Kirby'ego [226] zawiera następujące pytanie:

Hipoteza 7.2.33 (problem 1.91)**.** *Niech K będzie prostym węzłem bez orientacji (w jego dopełnieniu nie ma nierównoległych do brzegu, nieściśliwych pierścieni). Czy istnieją węzły niebędące mutantami K, których nie można odróżnić od K wielomianem Jonesa oraz wszystkimi jego satelitami?*

Stojmenow pisze, że tak: pierwszą chronologicznie parą jest 14_{41721}, 14_{42125}, dowód opiera się na wzorze fuzyjnym Masbauma-Vogela z pracy [290]. Patrz [428, przykład 3.3] oraz [426, przykład 3.2].

Choć wzór ten zastosowany do konkretnej pary węzłów sprawia zazwyczaj trudności rachunkowe, to jest wystarczającym narzędziem, by rozszerzyć konstrukcję do ogólnego wyniku:

Fakt 7.2.34 Istnieje nieskończenie wiele par prostych węzłów hiperbolicznych o tych samych kolorowych wielomianach Jonesa, które nie są swoimi mutantami.

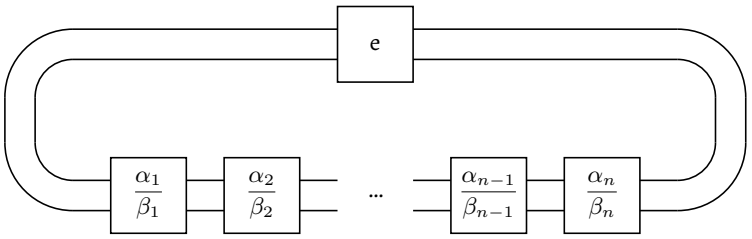
Dowód. Stojmenow, Tanaka [428, tw. 1.1]. ■

7.3 Precle

Precle to sploty ze standardowym diagramem, na którym wyróżnić można co najmniej trzy warkocze na dokładnie dwóch pasmach. Warkocze te ułożone są w sposób cykliczny. Pojawiły się po raz pierwszy w książce Reidemeistera z 1932 roku jako przykład węzła o trywialnym wielomianie Alexandera. Zanim podamy formalną definicję, wygodnie będzie przyjrzyć się ogólniejszej rodzinie splotów Montesinosa, nazwanych tak na cześć José Marii Montesinosa Amilibii, topologa hiszpańskiego. Wprowadził je do matematyki w 1973 roku [301].

Kawauchi [219, s. 29] pisze, że Montesinos uogólnił precle, bo dwukrotne nakrycie nad S^3 rozgałęzione wzdłuż precla jest rozmaitością Seiferta.

Definicja 7.3.1 — splot Montesinosa. Splotem Montesinosa nazywamy splot o poniższym diagramie, gdzie wymierne liczby α_i/β_i oraz całkowita $e \in \mathbb{Z}$ odpowiadają supłom.



Cały dwunasty rozdział podręcznika Burdego i Zieschanga [64] jest poświęcony splotom Montesinosa. Można tam znaleźć ich klasyfikację, zawiera jednak pułapkę: autorzy używają innej notacji dla supłów dwumostowych. Podają przykład węzła $43/105 = [0, 2, 2, 3, 1, 4]$, dla nas to jest $105/22 = [4, 1, 3, 2, 2]$.

Fakt 7.3.2 Sploty Montesinosa o $r \geqslant 3$ supłach $\beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_2, \ldots$ takich, że

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\alpha_j} \leqslant r - 2 \tag{7.35}$$

są sklasyfikowane (z dokładnością do cyklicznych permutacji oraz odwracania) przez uporządkowany zbior ułamków $\{\beta_i/\alpha_i \mod 1 : 1 \leqslant i \leqslant r\}$ razem z wymierną liczbą

$$e_0 = e + \sum_{j=1}^{r} \frac{\beta_j}{\alpha_j}. \tag{7.36}$$

Powyższy fakt nie używa naszej notacji! (Można przeczytać też [219, s. 28] dla splotów.)

Dowód. Praca doktorska Bonahona [42]. W internecie dostępny jest jej skan (gdyż była pisana odręcznie po francusku!), ale angielskie tłumaczenie nie istnieje. ■

Używając nadal tej niestandardowej notacji można sklasyfikować węzły odwracalny czy zwierciadlane:

Fakt 7.3.3 Splot Montesinosa jest zwierciadlany wtedy i tylko wtedy, gdy $e = 0$ oraz istnieje permutacja π, cykl długości r lub odwrócenie, taka że

$$\frac{\beta_{\pi(i)}}{\alpha_{\pi(i)}} \equiv -\frac{\beta_i}{\alpha_i} \pmod 1. \tag{7.37}$$

Dowód. Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 230]. ■

Wniosek 7.3.4 Splot Montesinosa z nieparzystą liczbą supłów nie jest zwierciadlany.

Fakt 7.3.5 Splot Montesinosa jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy, po ewentualnej zmianie etykiet supłów, przynajmniej jedna z liczb α_i jest parzysta lub wszystkie liczby α_i są parzyste, a sam splot ma postać

$$M\left(e_0, \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\beta_p}{\alpha_p}, \frac{\beta_p}{\alpha_p}, \ldots, \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) \tag{7.38}$$

(oraz $r = 2p$) lub

$$M\left(e_0, \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\beta_p}{\alpha_p}, \frac{\beta_{p+1}}{\alpha_{p+1}}, \frac{\beta_p}{\alpha_p}, \ldots, \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) \tag{7.39}$$

(oraz $r = 2p + 1$) lub

$$M\left(e_0, \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\beta_p}{\alpha_p}, \frac{\beta_{p+1}}{\alpha_{p+1}}, \frac{\beta_p}{\alpha_p}, \ldots, \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right). \tag{7.40}$$

(oraz $r = 2p$).

Dowód. Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 231]. ■

Definicja 7.3.6 — precel. Splot Montesinosa o całkowitych współczynnikach nazywamy preclem.

Na standardowym diagramie precla $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ występuje p_1 lewych skrzyżowań w pierwszym suple, p_2 w drugim, i tak dalej. Taki precel jest węzłem dokładnie wtedy, gdy n oraz p_i są nieparzyste lub dokładnie jedna z liczb p_i jest parzysta (Kawauchi [219, s. 27]).

Fakt 7.3.7 Jeśli co najmniej dwa współczynniki p_i, p_j zerują się, precel jest rozszczepialny.

Źródło: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pretzel_link&oldid=8626389. Implikacja odwrotna jest rzekomo fałszywa, ale nie umiemy powiedzieć, dlaczego.

Dowód. Widać to bezpośrednio z diagramu: jego część zawarta między supłem p_i oraz p_j jest rozłączna z resztą diagramu. ■

Precel $(1, 1, 1)$ to prawy trójlistnik, $(5, -1, -1)$ to węzeł dokerski 6_1, $(-3, 0, -3)$ to splot dwóch trójlistników, zaś $(2p, 2q, 2r)$ jest splotem trzech niewęzłów. Precle $(-2, 3, 2n + 1)$ są szczególnie użyteczne jako narzędzie do badania 3-rozmaitości. Wiele twierdzeń, które dotyczą takich rozmaitości, opiera się na przykład na chirurgii Dehna precla $(-2, 3, 7)$.

Fakt 7.3.8 Niech K będzie węzłem torusowym. Jeśli K jest jednocześnie $(-2, 3, k)$-preclem, to

$$K = 5_1 = T_{2,5} = P(1, 3, -2) \tag{7.41}$$

albo

$$K = 8_{19} = T_{3,4} = P(3, 3, -2) \tag{7.42}$$

albo

$$K = 10_{124} = T_{3,5} = P(5, 3, -2). \tag{7.43}$$

Pozostałe $(-2, 3, k)$-precle są hiperboliczne.

Dowód. Garoufalidis, Koutschan [152]. ■

Fakt 7.3.9 Niech p, q, r będą liczbami nieparzystymi takimi, że $|p|, |q|, |r|$ są parami różne i większe niż 1. Wtedy (p, q, r)-precel jest nieodwracalny.

Dowód. Zgodnie z sugestią Foxa, Trotter [447] przetłumaczył problem na język teorii grup. Wyróżnia w grupie węzła dwa elementy – (zorientowany) południk i równoleżnik. Jeśli dwa węzły są równoważne, to homeomorfizm $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ posyłający jeden na drugi wyznacza izomorfizm ich grup podstawowych, który posyła południk na południk i równoleżnik na

równoleżnik. W szczególności, jeśli węzeł jest odwracalny, to jego grupa posiada specjalny automorfizm („inwersję") odwracający zarówno południk, jak i równoleżnik. To prowadzi do sprzeczności w przypadku rozpatrywanych precli. ■

Wystarczający warunek z tego stwierdzenia jest prawie konieczny. Jeśli $p = r$, węzeł można odwrócić przez półobrót wokół środkowej osi. Cykliczne permutacje trójki (p, q, r) nie zmieniają węzła, więc wszystkie trzy liczby p, q, r muszą być różne. Jeśli jedna z tych liczb jest parzysta, półobrót wokół poziomej osi odwraca węzeł. Z pracy Bankwitza, Schumanna [20] wynika, że jeśli któryś z parametrów ma wartość ± 1, to węzeł też jest odwracalny. Pokazać to wprost nie jest trudno. Zatem nie wiemy jedynie jakie są precle $(p, q, -q)$, gdzie $|p| \neq |q|$ oraz $|p|, |q| \geqslant 3$.

Jeśli liczby p, q, r są nieparzyste i tego samego znaku, to wyznacznik precla (p, q, r) jest postaci $4n+3$. Wtedy używając formy kwadratowej (jak Reidemeister w 1932!) można pokazać, że taki węzeł nie jest achiralny. Niech K będzie zorientowanym preclem $(3, 5, 7)$. Wtedy K, m K, r K, mr K są parami nierównoważne. Węzeł K # m K jest dodatnio zwierciadlany, zaś r K # m K ujemnie zwierciadlany. Trójlistnik jest odwracalny, ale nie zwierciadlany, ósemka jest zwierciadlana i odwracalna. To pokazuje, że wszystkie typy symetrii są realizowane przez precle lub sumy precli.

Fakt 7.3.10 Jeżeli liczby p, q, r są nieparzyste, to wielomianem Alexandera (p, q, r)-precla jest

$$\Delta = \frac{1}{4}((pq + qr + pr)(t-1)^2 + (t+1)^2). \tag{7.44}$$

Dowód. Bae, Lee [18, lemat 3.1] pokazali, że macierz Seiferta (p, q, r)-precla to

$$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p+q & p-1 \\ p+1 & p+r \end{bmatrix}, \tag{7.45}$$

wystarczy więc użyć wzoru $\Delta = \det(M - tM^\top)$. ■

Wielomian Alexandera precla $(p_1, \ldots, p_n)$ nigdy nie zależy od kolejności współczynników, jest to ćwiczenie w książce Livingstona [274, s. 215].

Fakt 7.3.11 Niech K będzie $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$-preclem. Wtedy

$$\det K = \left(\prod_{k=1}^{n} p_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k}\right). \tag{7.46}$$

Dowód. Nie wiemy, kto pierwszy zauważył ten elementarny fakt, ale wiemy, gdzie pierwszy raz w życiu o tym przeczytaliśmy: w pracy Kolaya [238, s. 14]. ■

Fakt 7.3.12 Niech n będzie liczbą pierwszą. Węzeł p, q, r-preclowy jest n-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy n dzieli $|pq + qr + pr|$. Jeśli przynajmniej jedna z liczba p, q, r nie jest wielokrotnością n, to kolorowanie z dokładnością do permutacji jest dokładnie jedno. W przeciwnym przypadku istnieją cztery różne kolorowania.

Dowód. Pierwsza część jest wnioskiem ze stwierdzeń 4.3.7, 5.1.14 oraz 7.3.10. Dowód drugiej zawiera praca Brownell, O'Neil, Taalman [57, s. 11]. ■

Podano tam (czyli w [57]) także ogólny wzór na liczbę n-kolorowań dowolnego węzła.

7.4 Węzły Lissajous

Węzły Lissajous zdefiniowali Bogle, Hearst, Jones i Stoiłow [38] jako węzły, których pewien diagram jest krzywą Lissajous.

Definicja 7.4.1 — węzeł Lissajous. Niech n_x, n_y, n_z będą liczbami całkowitymi (zwanymi dalej „częstotliwościami"), zaś $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ liczbami rzeczywistymi („fazami"). Wtedy węzeł zadany w $\mathbb{R}^3$ parametrycznie:

$$x = \cos(n_x t + \varphi_x), \quad y = \cos(n_y t + \varphi_y), \quad z = \cos(n_z t + \varphi_z), \tag{7.47}$$

nazywamy węzłem Lissajous.

Węzeł nie może posiadać samoprzecięć, dlatego żadna z wielkości $n_i\varphi_j - n_j\varphi_i$, dla różnych indeksów i, j nie może być krotnością π. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\varphi_z = 0$. Dodatkowo stałe n_x, n_y, n_z muszą być parami względnie pierwsze.

Wiele węzłów jest węzłami Lissajous:

■ **Przykład 7.4.2** Dla $n_x = 3, n_y = 2, n_z = 7, \varphi_x = 7/10, \varphi_y = 2/10$ mamy węzeł 5_2. ■

■ **Przykład 7.4.3** Węzły pierwsze $6_1, 7_4, 8_{15}, 10_1, 10_{35}, 10_{58}$ są węzłami Lissajous. ■

■ **Przykład 7.4.4** Suma prawego i lewego trójlistnika, suma dwóch kopii 5_2 są węzłami Lissajous. ■

Jest wiele węzłów Lissajous:

Fakt 7.4.5 Istnieje nieskończenie wiele węzłów Lissajous.

Dowód. Niech $a, b > 1$ będą względnie pierwsze. Lamm [254] pokazał dużo ogólniejszy wynik. Mianowicie: węzeł Lissajous o częstotliwościach $n_x = a, n_y = b, n_z = 2ab - a - b$ oraz fazach:

$$\varphi_x = \frac{2n_x - 1}{n_z}\pi, \quad \varphi_y = \frac{\pi}{n_z}, \quad \varphi_z = 0 \tag{7.48}$$

posiada sygnaturę $\sigma = a + b - ab - 1$ i genus $g = -\sigma/2$. ■

Węzły Lissajous są bardzo symetryczne.

Fakt 7.4.6 Jeśli wszystkie częstotliwości n_x, n_y, n_z węzła Lissajous są nieparzyste, to węzeł ten jest silnie dodatnio achiralny.

Fakt 7.4.7 Jeśli jedna z częstotliwości n_x węzła Lissajous jest parzysta, to węzeł ten jest 2-okresowy.

Dowód. Półobrót węzła K wokół osi x odwzorowuje go w siebie. ■

To nakłada ograniczenia na wielomian Alexandera.

Fakt 7.4.8 Niech K będzie węzłem Lissajous. Wtedy $\Delta(t)$, jego wielomian Alexandera, jest kwadratem w pierścieniu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[t]$.

Dowód. Rozpatrzmy dwa przypadki.
Przypadek I Jeżeli wszystkie trzy częstotliwości n_x, n_y, n_z są nieparzyste, to węzeł K jest silnie dodatnio achiralny (fakt 7.4.6). Hartley, Kawauchi [179] pokazali, że wymierna grupa homologii pewnego konkretnego nakrycia $S^3 \setminus K$ jest sumą prostą $M \oplus M$, gdzie M jest $\mathbb{Q}\langle t\rangle$-modułem, więc wielomian Alexandera $\Delta_K(t)$ jest kwadratem w pierścieniu $\mathbb{Z}[t]$. Szczegóły ich pracy są dla nas nieistotne; nam wystarczy zauważyć, że stąd już wynika kwadratowość wielomianu $\Delta_K(t)$ w pierścieniu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[t]$.
Przypadek II Jeżeli jedna z częstotliwości jest parzysta, to węzeł K jest 2-okresowy (fakt 7.4.7). Niech J będzie jego węzłem ilorazowym. Z faktu 2.2.6 (dla $n = 2^1$ oraz $\lambda = 1$) dostajemy kongruencję $\Delta_K(t) \equiv t^k \Delta_J(t)^2 \mod 2$ dla pewnej liczby całkowitej k: znak $\pm$ nie ma znaczenia modulo 2, zaś czynnik $1 + t + \ldots + t^{\lambda-1}$ jest równy 1. Wielomiany Δ_K oraz Δ_J są symetryczne w zmiennych t i $1/t$, a $\Delta_J \not\equiv 0 \mod 2$, bo $\Delta_J(1) = \pm 1$. Zatem $t^k = t^{-k}$, czyli $k = 0$ i mamy równość

$$\Delta_K(t) \equiv \Delta_J^2(t) \mod 2, \tag{7.49}$$

która kończy dowód. ∎

Warto zwrócić uwagę, że bycie silnie dodatnio achiralnym jest bardzo restrykcyjnym warunkiem. Spośród pierwszych węzłów o co najwyżej 12 skrzyżowaniach, spełnia go mniej niż dziesięć. Lamm [255] wymienia: 10a103 (10_{99}), 10a121 (10_{123}), 12a427, 12a1019, 12a1105, 12a1202, 12n706 oraz być może 12a435. W 2018 roku wiedzieliśmy tylko, że 10a103 jest węzłem Lissajous i nie wiedzieliśmy, co z pozostałymi węzłami.

■ **Przykład 7.4.9** Trójlistnik oraz ósemka nie są węzłami Lissajous. ■

Wygodnie jest przeformułować warunek z faktu 7.4.8 do następującej postaci. Wielomian $\Delta(t) = A_0 + A_1(t + 1/t) + \cdots + A_n(t^n + 1/t^n)$ jest kwadratem modulo 2 wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki A_{2k+1} są parzyste dla $k \geqslant 0$.

Wniosek 7.4.10 Niech K będzie węzłem Lissajous, wtedy niezmiennik Arfa K znika.

Dowód. Niech $\Delta(t) = A_0 + A_1(t + 1/t) + \cdots + A_n(t^n + 1/t^n)$ będzie wielomianem Alexandera węzła K. Skoro $\Delta_K(1) = \pm 1$, to $0 = \pm 1 + A_0 + 2A_1 + \cdots + 2A_n$. Możemy teraz odjąć tę równość stronami od $\Delta_K(-1) = A_0 - 2A_1 \pm \cdots$, by uzyskać

$$\Delta_K(-1) = \pm 1 - 4A_1 - 4A_3 - \cdots. \tag{7.50}$$

Razem z wygodnym przeformułowaniem daje to $\Delta_K(-1) \equiv \pm 1 \mod 8$, co w połączeniu z faktem 6.3.3 kończy dowód: $\operatorname{Arf} K = 0$. ∎

Wniosek 7.4.11 Włókniste węzły o nieparzystym genusie nie są węzłami Lissajous.

Dowód. Wynika to z naszego wygodnego przeformułowania oraz faktu 6.2.6. ∎

Wniosek 7.4.12 Niech K będzie dwumostowym węzłem Lissajous. Wtedy $\Delta_K(t) \equiv 1 \mod 2$.

Dowód. Nietrywialny węzeł o dwóch mostach nie może być silnie dodatnio achiralny (Hartley, Kawauchi [179]). Jeśli jest węzłem Lissajous, jedna z jego częstotliwości okazuje się być parzysta. Wtedy jego węzeł ilorazowy jest trywialny i kongruencja 7.49 daje $\Delta_K(t) \equiv 1 \mod 2$. ■

Wniosek 7.4.13 Dwumostowe węzły rozwłóknione nie są węzłami Lissajous.

Można skorzystać z tego samego argumentu, co w dowodzie wniosku 7.4.11 oraz 7.4.12.

Fakt 7.4.14 Niech p, q będą względnie pierwszymi liczbami różnymi od $0, \pm 1$, zaś K węzłem. Wtedy (p, q)-kabel węzła K nie jest węzłem Lissajous.

Lamm pisze, że obiekt ten – (p, q)-kabel – zdefiniowano w książce Eisenbuda/Neumanna „Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities". Celowo pomijamy ją w bibliografii, prawdopodobnie chodzi o zwykłe węzły satelitarne.

Dowód. Niech L będzie (p, q)-kablem węzła K. Seifert [407] pokazał, że

$$\Delta_L(t) = \frac{(t^{pq}-1)(t-1)}{(t^p-1)(t^q-1)}\Delta_K(t^p), \tag{7.51}$$

przy czym wyjątkowo wielomian Δ nie jest symetryczny w t oraz $1/t$, tylko unormowany. Dwa najwyższe współczynniki w wielomianie „ułamkowym" to ± 1, a skoro $|p| > 1$, dwa najwyższe współczynniki Δ_L to także ± 1. „Wygodne sformułowanie" kończy dowód. ■

Wniosek 7.4.15 Nietrywialne węzły torusowe nie są węzłami Lissajous.

Dowód. Węzły torusowe to kable niewęzła. ■

Wniosek 7.4.16 Nietrywialne węzły algebraiczne nie są węzłami Lissajous.

Co to są węzły algebraiczne? Nie wiemy.

Dowód. Wynika to z ogólniejszego stwierdzenia: jeśli spełniony jest warunek $|p_n|, |q_n| > 1$, to iterowane węzły torusowe typu $((p_n, q_n), (p_1, q_1))$ nie są węzłami Lissajous. ■

Podamy teraz pierwszy warunek wystarczający, by być węzłem Lissajous. Znaleźli go Hoste oraz Zirbel [192]:

Fakt 7.4.17 Niech K będzie węzłem skręconym. Następujące warunki są równoważne:

- węzeł K jest węzłem Lissajous;
- niezmiennik Arfa węzła K znika, $\operatorname{Arf} K = 0$.

Węzły bilardowe to zamknięte trajektorie kuli, która zostaje wystrzelona z jednej ze ścian sześcianu, odbija się pod takim samym kątem, pod jakim pada na ściany. Jones, Przytycki [204] pokazali, że węzły bilardowe to dokładnie węzły Lissajous i zadali pytanie, czy każdy węzeł można zrealizować jako trajektorię kuli w jakimś wielościanie.

Odpowiedź jest pozytywna. Koseleff, Pecker [241] korzystając z twierdzenia Manturowa (każdy splot jest domknięciem kwazitorycznego warkocza, patrz komentarz na stronie 141) pokazują, że każdy węzeł ma diagram, który jest wielokątem gwiaździstym. Użyte zostało twierdzenie Kroneckera z 1884 roku: jeśli liczby $\theta_0 = 1, \theta_1, \ldots, \theta_k$ są liniowo niezależne nad ciałem $\mathbb{Q}$, to zbiór punktów $(\lfloor n\theta_i \rfloor_{i=0}^{k})_{n=0}^{\infty}$ leży gęsto w kostce jednostkowej.

Lamm, Obermeyer [256] dowiedli w 1999, że węzły bilardowe wewnątrz walca są taśmowe albo okresowe, więc w walcu nie można zrealizować każdego węzła. Lamm postawił hipotezę, że jest to możliwe w eliptycznym walcu. Pozytywnej odpowiedzi ponownie udzielił niedawno Pecker [352].

7.5 Węzły torusowe

W tej sekcji przyjrzymy się węzłom o specjalnym ułożeniu w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Do ich określenia potrzebny jest torus trywialny, powierzchnia otrzymana przez obrót okręgu $(x-2)^2+y^2=1$ wokół osi y. Można go także uzyskać przez sklejenie podstaw walca tak, by go przy tym nie zapętlić. Oczywiście istnieją też nietrywialne torusy, jak rurowe otoczenie trójlistnika.

Sploty torusowe wprowadza króciutko Kawauchi [219, s. 26-27].

Definicja 7.5.1 — splot torusowy. Splot, który leży na powierzchni trywialnego torusa, nazywamy torusowym.

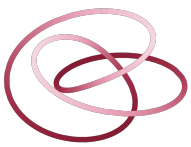
Na walcu $S^1 \times [0,1]$, którego podstawa leży w płaszczyźnie xy, rozpatrzmy p skierowanych odcinków (dla $k = 0, 1, \ldots, p-1$) o końcach w punktach

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{p}, \sin\frac{2k\pi}{p}, 0\right), \quad \left(\cos\frac{2k\pi}{p}, \sin\frac{2k\pi}{p}, 1\right).$$

Przekręćmy górną podstawę walca wokół osi z o skierowany kąt $2\pi q/p$ oraz utożsamimy ze sobą pary punktów $(x,y,0) \sim (x,y,1)$. Uzyskaliśmy splot torusowy $T_{p,q}$: okrąża on q razy rdzeń torusa i p razy jego oś symetrii obrotowej. Węzeł $T_{p,q}$ posiada następującą parametryzację:

$$x = (2+\cos q\phi)\cos p\phi, \quad y = (2+\cos q\phi)\sin p\phi, \quad z = -\sin q\phi, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi.$$

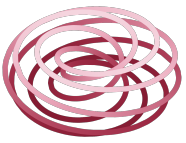
Poniżej przedstawiamy trzy węzły torusowe.



(a) trójlistnik: $p=3, q=2$



(b) $p=3, q=8$



(c) $p=8, q=3$

Murasugi [328, s. 135] pisze, że będzie nazywać okrąg leżący na powierzchni torusa $T_{0,0}$ (chociaż według naszej parametryzacji to byłby punkt), natomiast okrąg m, użyty wcześniej do zbudowania trywialnego torusa – czyli nawiniętą toroidalnie pętlę – $T_{1,0}$. Zaznacza przy tym, że żaden z tych dwóch okręgów nie jest właściwym splotem torusowym w opisanym wyżej sensie; to jedynie rozszerzenie notacji $T_{q,r}$ na przypadek $r = 0$.

Okazuje się, że innych obiektów już nie ma.

Fakt 7.5.2 Niech K będzie splotem torusowym takim, że żadne z jego ogniw nie jest niewęzłem, czyli postaci $T_{1,0}$. Wtedy $K = T_{p,q}$ dla pewnych całkowitych p, q.

Fakt 7.5.3 Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb całkowitych p, q. Wtedy węzeł torusowy $T_{p,q}$ posiada dokładnie d ogniw.

Siedem węzłów z tabeli na końcu książki to węzły torusowe. Są to niewęzeł, $3_1 = T_{3,2}$, $5_1 = T_{5,2}$, $7_1 = T_{7,2}$, $8_{19} = T_{4,3}$, $9_1 = T_{9,2}$ oraz $10_{124} = T_{5,3}$.

Fakt 7.5.4 Niech p, q będą względnie pierwszymi liczbami takimi, że $|p|, |q| \geqslant 2$. Wtedy splot $T_{p,q}$ oraz splot do niego odwrotny, $T_{-p,-q}$, są tego samego typu.

Sploty $T_{p,q}$ oraz $T_{q,p}$ również są równoważne. Murasugi prezentuje w swojej książce [328] przyjemny dowód opierający się na następującym lemacie:

Lemat 7.5.5. *Sfera S^3 powstaje z powierzchni dwóch węzłów trywialnych z wnętrzem ($D^2 \times S^1$) przez wzajemne sklejenie południka i równoleżnika z równoleżnikiem i południkiem.*

Węzły torusowe są pierwsze, czego dowód można znaleźć u Burdego, Zieschanga [64, s. 101], chociaż nie wiemy, kto pierwszy to zauważył.

Fakt 7.5.6 Niech K będzie nietrywialnym węzłem, którego grupa podstawowa π ma nietrywialne centrum. Wtedy K jest węzłem torusowym.

Dowód. W 1961 roku pokazali to Murasugi [320], Neuwirth [340] przy dodatkowym założeniu, że węzeł K jest alternujący, wkrótce po tym Burde, Zieschang znaleźli dowód w ogólnym przypadku [62] (gdzie napisali, że dla alternujących węzłów hipoteza wynika wprost z pracy Aumanna [16] z 1956 roku). Ich dowód korzysta z wyników Neuwirtha (komutant grupy π jest skończenie generowany), Stallingsa (dopełnienie X tubularnego otoczenia K można rozwłóknić nad S^1 z włóknem: 2-rozmaitością M, z jedną krzywą na brzegu) i Nielsena. ■

Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 85] piszą, że Waldhausen znacznie uogólnił wynik: jeśli M jest orientowalną, zwartą, nierozkładalną 3-rozmaitością taką, że grupa $H_1(M)$ jest nieskończona lub $\pi_1 M$ jest nietrywialnym produktem wolnym z amalgamacją i $\pi_1 M$ ma nietrywialne centrum, to M jest włóknistą rozmaitością Seiferta z orientowalnym orbifoldem.

Przejdźmy do podania wartości różnych niezmienników.

7.5.1 Niezmienniki liczbowe węzłów torusowych

Podamy teraz wartości całkowitoliczbowych niezmienników dla węzłów torusowych przy założeniu, że p lub q nie jest zerem. Nietrywialne węzły torusowe są odwracalne, ale mają

niezerową sygnaturę, więc nie są achiralne (chyba wiedział o tym Schreier [398]).

Fakt 7.5.7 Okresy splotu torusowego $T_{p,q}$ to dokładnie dzielniki p lub q.

Dowód. Kawauchi [219, ćw 10.1.9] ■

Fakt 7.5.8 Niech $p, q > 0$ będą liczbami całkowitymi, zaś R_2 oznacza resztę z dzielenia przez dwa. Zdefiniujmy funkcję $\sigma(p,q) = -\sigma(T_{p,q})$. Spełnia zależność rekurencyjną

$$\sigma(p,q) = \begin{cases} q^2 + \sigma(p, p-2q) - R_2(p) & \text{jeśli } 2q < p, \\ q^2 - 1 & \text{jeśli } 2q = p, \\ q^2 - \sigma(2q-p, q) + R_2(q) - 2 & \text{jeśli } 2q > p > q, \\ \frac{1}{2}(q^2 + R_2(q)) - 1 & \text{jeśli } p = q, \end{cases} \tag{7.52}$$

z warunkami brzegowymi: $\sigma(1,q) = 0$, $\sigma(2,q) = q-1$ oraz równość $\sigma(p,q) = \sigma(q,p)$.

Niedowód. Gordon, Litherland, Murasugi [168, tw. 5.2] wspominają, że Brieskorn [52] policzył sygnatury pewnych rozmaitości algebraicznych, co wystarcza do znalezienia sygnatury węzłów torusowych. Prowadzi to do takiego samego wzoru jak ten znaleziony przez Hirzebrucha [187]. Ale to wszystko jest trochę nieporęczne, dlatego używają niezmiennika acyklicznego (o trywialnych zredukowanych grupach homologii; z angielskiego *null-homologous*) splotu L w zorientowanej 3-rozmaitości M w połączeniu z jego m-krotnym rozgałęzionym nakryciem cyklicznym. ■

Borodzik niedawno przyjrzał się dokładniej sygnaturom węzłów torusowych. Razem z Oleszkiewiczem [49] pokazał, że nie istnieje wymierna funkcja $R(p,q)$, która pokrywałaby się z sygnaturą węzła torusowego $T_{p,q}$ dla wszystkich względnie pierwszych, nieparzystych wartości p oraz q.

Fakt 7.5.9 Niech p, q będą względnie pierwszymi liczbami, zaś $C \in [0,1)$ stałą taką, że Cpq nie jest liczbą całkowitą. Przyjmijmy $z = \exp(2\pi i C)$ i zdefinujmy pomocnicze funkcje: niech $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ oznacza część ułamkową, zaś

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Z} \\ \{x\} - 1/2 & \text{dla } x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \tag{7.53}$$

funkcję piłę. Dalej, określmy sumę Dedekinda

$$s(p,q,x) = \sum_{j=0}^{q-1} \left\langle \frac{j}{q} \right\rangle \left\langle \frac{jp}{q} + x \right\rangle. \tag{7.54}$$

(Uwaga! Definicja funkcji s z [49] zawiera złośliwą literówkę). Przy tych oznaczeniach,

sygnatura węzła (p,q)-torusowego wyznacza się wzorem

$$\sigma(z) = \frac{1}{3pq}\left(p^2+q^2+6\langle Cpq\rangle^2 - \frac{1}{2}\right) + 2(C^2-C)pq + (2-4C)\langle Cpq\rangle + \\ - 2s(p,q,Cp) - 2s(q,p,Cq) - 2s(p,q,p-pC) - 2s(q,p,q-qC). \tag{7.55}$$

Wniosek 7.5.10 Jeśli p, q są nieparzyste i względnie pierwsze, to

$$\sigma(T_{p,q}) = \frac{1}{6pq} + \frac{2p}{3q} + \frac{2q}{3p} - \frac{pq}{2} - 4(s(2p,q,0)+s(2q,p,0)) - 1. \tag{7.56}$$

Wniosek 7.5.11 Jeśli p jest nieparzyste, zaś $q>2$ parzyste, to

$$\sigma(T_{p,q}) = -\frac{pq}{2} + 4s(2p,q,0) - 8s(p,q,0) + 1. \tag{7.57}$$

Wyznaczenie liczby gordyjskiej było dużo trudniejsze. Murasugi [328, s. 150] proponuje Czytelnikowi pokazanie, że zachodzi równość $\mathrm{u}\,T_{p,2} = \frac{1}{2}(|p|-1)$ oraz nierówność

$$u(T_{p,q}) \leqslant \frac{1}{2}(p-1)(q-1). \tag{7.58}$$

Milnor [298, uwaga 10.9] postawił hipotezę, że znak $\leqslant$ można zamienić na $=$. Pierwszy dowód znaleźli Kronheimer, Mrówka [244], [245]: panowie pokazali, że jeśli X jest gładką, jednospójną, domkniętą i zorientowaną 4-rozmaitością; posiada nietrywialny wielomianowy niezmiennik Donaldsona oraz wymiar maksymalnej dodatniej podprzestrzeni dla formy przecięć drugiej homologii jest nieparzysty, większy od 2, to genus każdej zorientowanej, gładko zanurzonej powierzchni F (poza dwoma wyjątkami, których nie rozumiemy), spełnia nierówność $2g-2 \geqslant F\cdot F$. Ugh!

Później Rasmussen [377] podał inny dowód, który nie wykorzystuje już cechowania (*gauge theory*), tylko homologię Chowanowa.

Fakt 7.5.12 Dla względnie pierwszych $p, q > 0$ mamy

$$\mathrm{u}\,T_{p,q} = \frac{1}{2}(p-1)(q-1). \tag{7.59}$$

Fakt 7.5.13 Dla względnie pierwszych $p, q > 0$ mamy

$$\mathrm{g}\,T_{p,q} = \frac{1}{2}(p-1)(q-1), \tag{7.60}$$

Dowód. Wyznacznik macierzy Seiferta węzła torusowego jest niezerowy, więc genus równa się stopniu wielomianu Alexandera. ∎

Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 63] prezentują ciekawy dowód z komutantem $\mathfrak{Z} = G/G'$, gdzie G jest grupą węzła, jego ilorazem $\mathfrak{Z}_n := \mathfrak{Z}/n\mathfrak{Z}$ oraz faktem, że $(\mathfrak{Z}_a * \mathfrak{Z}_b)'$ jest grupą wolną rzędu $(a-1)(b-1)$. Patrz też, co pisze Murasugi [328, s. 149].

Fakt 7.5.14 $\operatorname{br} T_{p,q} = \min\{|p|, |q|\}$

Według Murasugiego [328, s. 150] dowód znalazł Schubert [401].

Wniosek 7.5.15 Niech $p, q \neq 0$ będą liczbami całkowitymi. Wtedy $\mathrm{b}\, T_{p,q} = \min\{|p|, |q|\}$.

Dowód. Niech K będzie węzłem torusowym typu (p, q) z minimalnym przedstawieniem jako warkocz β. Z konstrukcji domknięcia (czyli dołączenia rozłącznych półokręgów) wynika, że diagram K ma dokładnie $b(K)$ lokalnych maksimów. Definicja liczby mostowej orzeka, iż $\operatorname{br} K \leqslant \mathrm{b}\, K$. Bez straty ogólności niech $p > q > 0$. Skoro węzeł K powstaje z q-warkocza $(\sigma_{q-1} \ldots \sigma_2\sigma_1)^p$, indeks $b(K)$ nie przekracza $q = br(K)$. ∎

Fakt 7.5.16 Mamy $\operatorname{cr} T_{p,q} = |pq| - \max\{|p|, |q|\}$.

Dowód. Murasugi [327, s. 255] zauważył, że jeśli γ jest jednorodnym n-warkoczem, gdzie $n = \mathrm{b}(\widehat{\gamma})$, zaś d_i to suma wykładników przy σ_i w γ, to $\operatorname{cr} \widehat{\gamma} = \sum_{i=1}^{n-1} |d_i|$. Ale splot torusowy $T_{p,q}$, gdzie $2 \leqslant p \leqslant q$, można przedstawić jako domknięcie jednorodnego p-warkocza $(\sigma_1\sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_{p-1})^q$, co kończy natychmiast dowód. ∎

7.5.2 Niezmienniki wielomianowe splotów torusowych

Wartości wielomianu Jonesa podajemy bez dowodu:

Fakt 7.5.17 Klamra Kauffmana spełnia zależność rekurencyjną

$$\langle T_{2,n} \rangle = A \langle T_{2,n-1} \rangle + (-1)^{n-1} A^{2-3n} \tag{7.61}$$

z warunkiem brzegowym $\langle T_{2,1} \rangle = -A^3$.

Fakt 7.5.18 Niech $K = T_{p,q}$ będzie węzłem torusowym. Wtedy jego wielomianem Jonesa jest

$$V_K(t) = \frac{\sqrt{t}^{(p-1)(q-1)}}{1-t^2} \cdot (1 - t^{p+1} - t^{q+1} + t^{p+q}). \tag{7.62}$$

Byłoby niezmiernie smutno, gdyby wszystkie dowody zostały pominięte, uzasadnimy więc ze szczegółami, dlaczego wielomian Alexandera splotów torusowych jest taki, jaki jest.

Fakt 7.5.19 Niech $L = T_{p,q}$ będzie splotem torusowym o d ogniwach, różnym od $T_{0,0}$. Wtedy jego wielomianem Alexandera jest

$$\Delta_L(t) = (-1)^{d-1} \frac{(1-t)(1-t^{pq/d})^d}{(1-t^p)(1-t^q)} \cdot t^{-(p-1)(q-1)/2}. \tag{7.63}$$

Przypadek $p = 2$ wymaga prostego rozumowania indukcyjnego. Samo ćwiczenie pojawia się w wielu podręcznikach topologii. Pełny dowód można znaleźć w [64, przykład 9.15], gdzie wyznaczono jakobian prezentacji grupy węzła $\langle x, y \mid x^p y^{-q} \rangle$.

Inne podejście, formułę Seiferta-Torresa, prezentuje przeglądowa praca Turaewa [448].

Dowód. Macierz Seiferta węzła torusowego $L = T_{p,q}$ ma nieskomplikowaną blokową budowę i posłuży nam do znalezienia wielomianu Alexandera wzorem $\Delta = \det(M - tM^t)$.

$$M = \begin{bmatrix} B & & & & \\ -B & B & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & B & \\ & & & -B & B \end{bmatrix}, \tag{7.64}$$

złożona z $(q-1)^2$ bloków o wymiarach $(p-1)\times(p-1)$:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & -1 & \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{7.65}$$

Rachunki pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. ■

Wniosek 7.5.20 Niech $K = T_{p,q}$ będzie węzłem torusowym. Wtedy jego wielomianem Alexandera jest

$$\Delta(t) = \frac{(t^{pq}-1)(t-1)}{(t^p-1)(t^q-1)}. \tag{7.66}$$

Wniosek 7.5.21 Wielomian Alexandera odróżnia od siebie węzły $(2,n)$-torusowe.

Dowód. Mamy $\Delta(T_{2,n})(t) = (t^n+1)/(t+1)$, więc $\deg \Delta(T_{2,n}) = n-1$. ■

Znajomość wielomianu Alexandera wystarcza na szczęście do podania pełnej klasyfikacji węzłów torusowych bez uciążliwego dowodu.

Fakt 7.5.22 Niech p, q, r, s będą liczbami całkowitymi. Wtedy naststępujące warunki są równoważne:

- węzły torusowe $T_{q,r}$ oraz $T_{p,s}$ są równoważne,
- $\{q,r\} = \{p,s\}$ lub $\{q,r\} = \{-p,-s\}$.

Dowód. Ograniczymy się do przypadku, gdy $p,q,r,s \geqslant 2$. Tylko jedna implikacja wymaga dowodu, w prawo. Bez straty ogólności załóżmy więc, że $q > r, p > s$. Skoro węzły $T_{q,r}$ i $T_{p,s}$ są równoważne, to porównanie najwyższych współczynników w ich wielomianach Alexandera daje równość $(q-1)(r-1) = (p-1)(s-1)$. Wymnożenie wszystkiego prowadzi do czterech przypadków: $s = r$, $s = ps$, $qr = r$, $qr = ps$, z których dwa środkowe nie mogą zachodzić (gdyż $p, q > 1$). Z czwartego wynika, że $qr \leqslant s < ps$, czyli sprzeczność. ■

Kawauchi pisze, że wcześniej klasyfikacja węzłów torusowych wynikała z klasyfikacji wolnych produktów $(\mathbb{Z}/p) * (\mathbb{Z}/q)$, które są ilorazami grup węzłów torusowych [398].

7.6 Węzły satelitarne

Załóżmy, że w dopełnieniu pewnego splotu został zanurzony torus. Jeżeli jest ściśliwy, to albo równoleżnik torusa ogranicza dysk w dopełnieniu splotu i torus jest niezawęźlony, albo południk ogranicza dysk w dopełnieniu splotu i splot nie przebiega wzdłuż torusa. Żadna z tych sytuacji nie jest ciekawa. Inny zdegenerowany przypadek występuje, gdy torus stanowi rurowe otoczenie jednego z ogniw splotu. W przeciwnym razie splot można zbudować z prostszych obiektów.

Oto formalny opis konstrukcji. Niech W będzie pełnym torusem. Dysk zanurzony w W, którego brzeg stanowi nieściągalną pętlę w ∂W, nazywamy południkowym. Mówimy, że zamknięta krzywa $\lambda \subseteq W$ jest właściwa, jeżeli przecina wszystkie dyski południkowe.

Definicja 7.6.1 — węzeł satelitarny. Niech P będzie splotem zanurzonym w torusie niezawęźlonym W tak, by co najmniej jedno z ogniw stanowiło właściwą pętlę w W. Niech C będzie węzłem, zaś V jego rurowym otoczeniem. Wybierzmy dowolny homeomorfizm $h\colon W \to V$. Wtedy splot $S = h(P)$ nazywamy satelitą o wzorcu P i towarzyszu C.

Taką definicję podają Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 21] (i wspominają, że towarzysze po niemiecku to Begleitknoten)

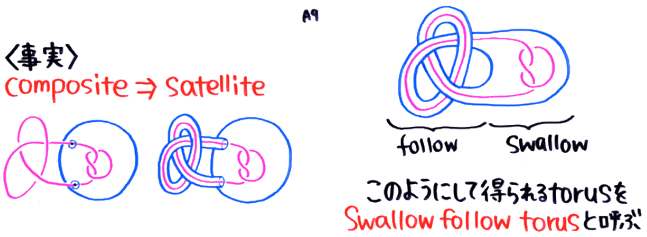
Hoste i inni [191] podejrzewają, że jeśli satelita owija się m-krotnie wokół torusa, zaś indeks skrzyżowaniowy towarzysza wynosi k, to satelita nie posiada diagramu o mniej niż km^2 skrzyżowaniach.

Ponieważ dla trójlistnika $k = 3$, napotkali się tylko na satelity owijające się $m = 2$ razy podczas tablicowania pierwszych węzłów do 16 skrzyżowań. Nie spodziewano się żadnego satelity ósemki, gdyż wtedy $k = 4$, zatem każdy satelita miałby co najmniej $4 \cdot 2^2 + 1 = 17$ skrzyżowań: dodatkowe $+1$ jest potrzebne, by nie dostać splotu o dwóch ogniwach.

Najprostszy satelita ma 13 skrzyżowań. Ze strony internetowej programu Regina można dowiedzieć się dokładniej, jak wygląda rozkład satelitów wśród małych węzłów:

skrzyżowania	13	14	15	16	17	18	19
węzły pierwsze, satelitarne	2	2	6	10	29	86	245

Razem 380 węzłów.



Rysunek 7.9: Torus połykająco-podążający. Źródło: strona internetowa C. Hayashiego.

■ **Przykład 7.6.2 — torus połykająco-podążający.** Klasa węzłów satelitarnych obejmuje węzły złożone. W ich przypadku można wskazać pewien szczególny torus nieściśliwy – połykający pierwszy składnik, a potem podążający za drugim[4]. ■

Schubert pokazał, że zorientowane klasy izotopii węzłów w S^3 tworzą wolny przemienny monoid na przeliczalnie wielu generatorach. Dowód to uważna analiza nieściśliwych torusów obecnych w dopełnieniu sumy spójnej. To doprowadziło go do definicji węzłów satelitarnych i towarzyszących w przełomowej pracy [400] oraz zunifikowało teorię 3-rozmaitości z teorią węzłów. Może warto zapoznać się z pracą Motegiego [313]? Wikipedia mówi, że zapis węzła jako satelity nie jest jednoznaczny, a tam mogą być przykłady.

Na brzegu torusa V można wprowadzić pewien układ współrzędnych: południk to pętla właściwa w ∂V, która ogranicza dysk w V, natomiast równoleżnik to pętla w ∂V, która spotyka południk raz. Z dokładnością do izotopii południk jest jeden, ale równoleżnik nie. Równoleżnik preferowany to taki, którego indeks zaczepienia z rdzeniem torusa wynosi zero.

Definicja 7.6.3 — dubel Whiteheada. Niech $P \subseteq W$ będzie jednokrotnie skręconym niewęzłem, tak jak na rysunku 3.1.2a w [219, s. 32]. Wtedy węzeł S nazywamy dublem Whiteheada.

Każdy węzeł posiada nieskończenie wiele dubli Whiteheada: wystarczy rozciąć torus V, skręcić jedną końcówkę i ponownie zszyć, żaden z nich nie jest odróżniany od niewęzła przez wielomian Alexandera.

Wyróżnia się pewien szczególny homeomorfizm h, który przenosi południk i preferowany równoleżnik W na południk i preferowany równoleżnik V. Nazywamy go wiernym. O dublu względem wiernego homeomorfizmu mówimy, że jest nieskręcony.

Definicja 7.6.4 — węzeł kablowy. Niech $h\colon W \to V$ będzie wiernym homeomorfizmem, zaś P węzłem (p,q)-torusowym. Satelitę S nazywamy węzłem (p,q)-kablowym albo krótko kablem.

Fakt 7.6.5 Każdy kabel wyznacza jednoznacznie węzeł, z którego powstał.

Dowód. Wniosek 2 z pracy Feustela, Whittena [131] pokazuje, że na podstawie kabla można wyznaczyć parametry węzła torusowego $K'_{p,q}$ oraz topologię dopełnienia oryginalnego węzła. Ale my wiemy już z twierdzenia Gordona-Lueckego, że różne węzły pierwsze mają różne dopełnienia… co jakoś kończy dowód. ■

Niewęzeł nie ma nietrywialnych towarzyszy (węzłów towarzyszących).

Definicja 7.6.6 Towarzysza C nietrywialnego splotu nazywamy właściwym, jeśli nie jest niewęzłem i nie jest ogniwem tego splotu.

Sploty bez właściwych towarzyszy określa się zazwyczaj terminem „atoroidalny”. Patrz też diagram przedstawiony u Cromwella [101, s. 83].

Schubert [401] zastanawiał się, czy węzeł może mieć nieskończenie wiele towarzyszy. Udzielił negatywnej odpowiedzi: satelita S z towarzyszem C oraz wzorcem indeksu k spełnia nierówność $\mathrm{br}(S) \geqslant k \cdot \mathrm{br}(C)$; z drugiej strony tylko niewęzeł jest 1-mostowy. (Patrz też wstęp do artykułu Schultens [404], skąd dowiedzieliśmy się o tych ciekawostkach). (Trochę dużo tych „patrz też”).

[4] Źródło obrazka: https://mcm-www.jwu.ac.jp/~hayashic/semi/07/07i/07i.html

Fakt 7.6.7 Duble nietrywialnych węzłów oraz kable są pierwsze.

Dowód. Prosty wniosek z twierdzenia 4.4.1 Cromwella [101, s. 84]: jeżeli wzorzec jest niewęzłem lub węzłem pierwszym, to każdy właściwy satelita jest pierwszy. ■

Niektóre węzły przedstawiają się jako satelity w dokładnie jeden sposób, inne nie. Rok 1979 przyniósł amerykańską pracę [198] oraz niemiecką książkę[5] [202], gdzie niezależnie od siebie opisano jednoznaczny rozkład (nazywany teraz) Jaco-Shalena-Johannsona:

Fakt 7.6.8 Niech M będzie nierozkładalną, orientowalną, domkniętą 3-rozmaitością. Wtedy istnieje minimalna rodzina rozłącznie zanurzonych nieściśliwych torusów tak, że każda składowa 3-rozmaitości powstałej przez rozcinanie wzdłuż torusów jest:

- atoroidalna lub
- włóknistą przestrzenią Seiferta (S^1-wiązką nad dwuwymiarowym orbifoldem).

Rodzina ta z dokładnością do izotopii jest jedyna.

Jest on związany z operacją złączania (ang. *splicing*), będącej uogólnieniem budowania satelitów, sumy spójnej, dubli Whiteheada i kasowania ogniwa. Hipotezę o jedyności rozkładu wysnuł wcześniej Waldhausen.

7.7 Węzły hiperboliczne

Jak pisaliśmy w sekcji 7.2.2, słynne węzły Conwaya oraz Kinoshity-Terasakiego odróżnił od siebie po raz pierwszy Riley. Zbadał paraboliczne reprezentacje ich grup w skończoną grupę prostą $PSL(2,7)$, co doprowadziło go do odkrycia struktury hiperbolicznej w dopełnieniu ósemki [382]. Zainspirowany tym wynikiem Thurston najpierw rozłożył dopełnienie ósemki na dwa idealne wielościany, a potem znacznie uogólnił swój przykład.

Autorzy tej książki nie rozumieją węzłów hiperbolicznych! Przeczytaliśmy przeglądową pracę Kalfagianniego, Futera oraz Purcell [148], notatki z wykładów prowadzone przez samą Purcell i wreszcie książkę [372], jaka z nich wyrosła. Wiedzę o węzłach hiperbolicznych można czerpać także z artykułu Weeksa [462]. Streścimy to, co zdążyliśmy przeczytać i odsyłamy zaintrygowanego Czytelnika do cytowanych pozycji.

Sekcję o węzłach hiperbolicznych wypada zacząć od przytoczenia ich definicji. Owszem, zrobimy to, ale bez wyjaśnienia znaczenia użytych tu trudnych słów:

Definicja 7.7.1 — hiperboliczny. Węzeł K, na dopełnieniu którego można zadać zupełną metrykę o stałej krzywiźnie -1 nazywamy hiperbolicznym.

Jeśli wiemy, czym jest 3-przestrzeń hiperboliczna $\mathbb{H}^3$, możemy używać równoważnej:

Definicja 7.7.2 Węzeł K taki, że istnieje dyskretna oraz beztorsyjna grupa izometrii Γ izomorficzna z $\pi_1(S^3 \setminus K)$ taka, że $S^3 \setminus K = \mathbb{H}^3/\Gamma$, nazywamy hiperbolicznym.

[5] Według recenzji Hempela, najważniejsze tam jest twierdzenie klasyfikacyjne: niech M_1, M_2 będą 3-rozmaitościami Hakena z brzegiem, zaś V_1, V_2 ich podrozmaitościami charakterystycznymi, wtedy każdą homotopijną równoważność $f\colon M_1 \to M_2$ można zdeformować tak, że jest homeomorfizmem między domknięciami: $M_1 \setminus V_1$ oraz $M_2 \setminus V_2$ i homotopijną równoważnością między V_1 oraz V_2.

7.7.1 Trychotomia Thurstona

Nie pamiętamy kto, gdzie i kiedy, ale ktoś gdzieś i kiedyś opowiedział nam, że Thurston podejrzewał, że każda 3-rozmaitość rozkłada się wzdłuż sfer i nieściśliwych torusów na części wyposażone w jedną z ośmiu kanonicznych geometrii:

- sferyczną S^3, albo euklidesową E^3, albo hiperboliczną H^3,
- albo $S^2 \times \mathbb{R}$, albo $H^2 \times \mathbb{R}$,
- albo uniwersalne nakrycie $SL(2, \mathbb{R})$,
- albo geometrię Sol albo geometrię Nil.

Dowód hipotezy geometryzacyjnej dostarczył mniej więcej dwie dekady później Perelman, ale dla nas to jest raczej bez znaczenia. Wystarczy nam starszy wynik samego Thurstona [435], który zajął się szczególnym przypadkiem rozmaitości Hakena. Dopełnienia splotów stanowią ich szczególny przypadek, dokładnej definicji nie podajemy umyślnie. I tak z przełomowych prac Thurstona z lat 70. oraz 80. wynika, że dopełnienie splotu jest rozmaitością włóknistą Seiferta, toroidalną albo hiperboliczną. Innymi słowy, Thurston przedstawił:

Twierdzenie 7.7.3 — trychotomia Thurstona. Każdy węzeł jest satelitarny, torusowy albo hiperboliczny.

Thurston pisze, że Riley przypuszczał to samo z pomocą komputera na podstawie dużej liczby przykładów.

Niedowód. Thurston [435, s. 360] dowodzi ogólniejszego faktu: wnętrze zwartej 3-rozmaitości z niepustym brzegiem M ma strukturę hiperboliczną wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość M jest homotopijnie atoroidalna, pierwsza oraz nie jest homeomorficzna z $T^2 \times I/(\mathbb{Z}/2)$, gdzie $\mathbb{Z}/2$ odwraca I. Stąd wynika już trychotomia. ■

7.7.2 Kryteria hiperboliczności

Węzły hiperboliczne stanowią najliczniejszą, ale też najmniej zrozumianą rodzinę węzłów. Sam Nead, użytkownik portalu MathOverflow napisał, że maszyneria JSJ[6] oraz prace innych osób pozwalają wysłowić algebraicznie kryterium Thurstona. Podajemy trzy równoważne postaci, od najbardziej konkretnej do w pełni algebraicznej.

Fakt 7.7.4 Niech L będzie takim splotem, który nie rozszczepia się, nie jest niewęzłem, nie posiada wśród ogniw niezakłóconego węzła satelitarnego (*„undisturbed satellite knot”*) oraz nie jest węzłem torusowym. Wtedy L jest hiperboliczny.

Fakt 7.7.5 Niech L będzie splotem takim, że jego dopełnienie $S^3 \setminus L$ nie zawiera właściwej 2-sfery, właściwego dysku, właściwego torusa ani właściwego pierścienia. Wtedy L jest hiperboliczny.

[6] rozkład Jaco-Shalena-Johannsona

Fakt 7.7.6 Niech L będzie splotem takim, że jego grupa $\pi(S^3 \setminus L)$ nie jest produktem wolnym, nie jest izomorficzna z $\mathbb{Z}$ oraz nie zawiera w sobie kopii grupy $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Wtedy L jest hiperboliczny.

Niedowód. Patrz https://mathoverflow.net/a/153327. ■

7.7.3 Przykłady rodzin węzłów hiperbolicznych

Czas na podanie jakichś przykładów węzłów hiperbolicznych, za Adamsem [4].

Fakt 7.7.7 Każdy alternujący, pierwszy, oraz nierozszczepialny splot jest albo 2-warkoczem (a zatem, torusowy) albo hiperboliczny.

Niedowód. Menasco [294] pokazał: dopełnienie alternującego węzła nie zawiera nieściśliwych nieperyferyjnych torusów. To w połączeniu z unifikacyjnym twierdzeniem Thurstona dla rozmaitości Hakena kończy(nie)dowód. ■

Fakt 7.7.8 Nietrywialne pierwsze prawie alternujące węzły są torusowe albo hiperboliczne.

Niedowód. Grupa studentów: Brock, Bugbee, Comar, Faigin, Huston, Joseph, Pesikoff pod opieką Adamsa [7]. ■

Fakt 7.7.9 Toroidalnie alternujące węzły pierwsze są torusowe albo hiperboliczne.

Ze wszystkich węzłów pierwszych do 11 skrzyżowań i pierwszych, nierozszczepialnych splotów do 10 skrzyżowań tylko 3 węzły i 2 sploty nie są toroidalnie alternujące, tak twierdzi Adams [4].

Niedowód. Patrz [3]. ■

Fakt 7.7.10 Sploty Montesinosa są prawie zawsze torusowe albo hiperboliczne.

Dowód. Najpierw Boileau, Siebenmann [40] zidentyfikowali torusowe sploty Montesinosa. Potem Oertel [343] dowiódł, że jeśli splot Montesinosa nie jest ani hiperboliczny, ani torusowy, to musi być jednym z wyjątków (z chyba trochę inną notacją niż nasza):

- $K(1/2, 1/2, 21/2, 21/2)$,
- $K(2/3, 21/3, 21/3)$,
- $K(1/2, 21/4, 21/4)$,
- $K(1/2, 21/3, 21/6)$,
- lub lustrem tych splotów. ■

Fakt 7.7.11 Mutant węzła hiperbolicznego jest węzłem hiperbolicznym.

Niedowód. Ruberman [389, wniosek 1.4]. ■

Z kryterium Thurstona mamy prosty wniosek:

Wniosek 7.7.12 Każdy węzeł hiperboliczny jest pierwszy.

Dowód. Każdy węzeł złożony jest satelitarny, patrz przykład 7.6.2. ■

7.7.4 Ile jest węzłów hiperbolicznych?

Prawie każdy węzeł pierwszy o mniej niż 17 skrzyżowaniach jest hiperboliczny, na 32 wyjątki składa się 12 węzłów torusowych oraz 20 satelitów trójlistnika. Te ostatnie mają co najmniej 13 skrzyżowań. Baza ciągów liczb całkowitych OEIS zawiera informacje na temat liczności poszczególnych typów węzłów. Analizując ciągi A051764, A051765 oraz A052408 można dojść do wniosku, że wraz ze wzrostem liczby skrzyżowań, stosunek liczby węzłów hiperbolicznych do wszystkich węzłów dąży do 1:

rodzaj	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
torusowe	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	2
satelitarne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	6
hiperboliczne	0	1	1	3	6	20	48	164	551	2176	9985	46969	253285

Ta obserwacja o granicy równej 1 jest jednak tylko przypuszczeniem, i to przypuszczeniem, które – jak zobaczymy – trudno nawet precyzyjnie wysłowić. W pracy [284] Malutin pokazał, że jest ono sprzeczne z wieloma innymi starymi hipotezami teorii węzłów: 7.7.13 – 7.7.16.

Hipoteza 7.7.13. *Indeks skrzyżowaniowy jest addytywny względem sumy spójnej.*

(To jest powtórzenie hipotezy 3.1.2).

Hipoteza 7.7.14. *Satelita ma większy (w słabszej wersji: nie mniejszy) indeks skrzyżowaniowy niż jego towarzysze.*

Lackenby [251] pokazał, że jeśli K jest satelitą z towarzyszem L, to $\operatorname{cr} K \geqslant 10^{-13} \operatorname{cr} L$.

Hipoteza 7.7.15. *Węzeł złożony ma większy (w słabszej wersji: nie mniejszy) indeks skrzyżowaniowy niż jego składniki.*

Mówimy, że węzeł pierwszy P jest λ-regularny, jeśli $\operatorname{cr} K \geqslant \lambda \cdot \operatorname{cr} P$ za każdym razem, gdy węzeł P jest składnikiem węzła K. Zatem hipotezę można wysłowić krótko „węzły pierwsze są 1-regularne". Z tego, co pisaliśmy po hipotezie 3.1.2 wynika, że hipoteza 7.7.13 jest prawdziwa w klasie węzłów alternujących czy torusowych i że wszystkie węzły są $1/152$-regularne.

Hipoteza 7.7.16. *Węzły pierwsze są $2/3$-regularne.*

Rozwiązanie zagadki przyniosła praca samego Malutina [285] opublikowana latem 2019 roku, przynajmniej dla splotów. Pokazał w niej, że jeśli oznaczymy liczbę splotów pierwszych i nierozszczepialnych o n lub mniej skrzyżowaniach przez P_n, zaś liczbę hiperbolicznych splotów, także o n lub mniej skrzyżowaniach, przez H_n, prawdziwe będzie oszacowanie

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{H_n}{P_n} < 1 - 10^{-13}. \tag{7.67}$$

7.7.5 Objętość hiperboliczna jako niezmiennik

Purcell [372, s. 66] proponuje znaleźć rodzinę zupełnych struktur hiperbolicznych na nakłutym torusie oraz czterokrotnie nakłutej sferze (w formie ćwiczenia). Podobna elastyczność nie występuje jednak w przestrzeniach wyższych wymiarów. Z twierdzenia o sztywności, w wersji algebraicznej:

Twierdzenie 7.7.17 — Mostow-Prasad. Niech Γ_1, Γ_2 będą dyskretnymi podgrupami grupy izometrii $\mathbb{H}^n$ dla $n \geqslant 3$ takimi, że ilorazy $\mathbb{H}^n/\Gamma_i$ mają skończone objętości. Załóżmy też, że istnieje izomorfizm grup $\varphi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$. Wtedy podgrupy Γ_1, Γ_2 są sprzężone.

albo geometrycznej:

Twierdzenie 7.7.18 — Mostow-Prasad. Niech M_1, M_2 będą zupełnymi, hiperbolicznymi rozmaitościami o skończonych objętościach. Wtedy każdy izomorfizm grup podstawowych $\varphi\colon \pi_1(M_1) \to \pi_1(M_2)$ realizowany jest jednoznacznie przez izometrię.

wynika, że jeśli znaleźliśmy jakąś zupełną strukturę hiperboliczną na dopełnieniu splotu, to innych już nie ma.

Niedowód. Pierwsi byli Mostow [312] oraz Prasad [363]. Thurston naszkicował rozumowanie w sekcji 5.9 swoich notatek, na bazie których powstała później książka [436]. Inny tok myślenia można znaleźć w podręczniku Benedettiego, Petronio [27, rozdział C]. ■

Twierdzenie Mostowa-Prasada pozwala nam na wprowadzenie nowych niezmienników splotów hiperbolicznych: wystarczy wziąć dowolny geometryczny niezmiennik dopełnienia węzła. Najważniejszym z nich wydaje się być objętość.

Definicja 7.7.19 — objętość. Niech L będzie splotem hiperbolicznym, na dopełnieniu którego zadano zupełną metrykę hiperboliczną. Objętość tego dopełnienia nazywamy objętością splotu L i oznaczamy $\operatorname{vol} L$.

Objętość jest zawsze skończoną liczbą rzeczywistą. Dla wygody przyjmuje się czasami, że objętość węzłów torusowych oraz satelitarnych wynosi 0. Komputerowy program SnapPea napisany przez Weeksa pozwala na wyznaczenie objętości dowolnego splotu o rozsądnej ilości skrzyżowań.

Thurston [435, s. 365] zauważył, że tylko skończenie wiele hiperbolicznych 3-rozmaitości może mieć tę samą objętość – wynika to z prac Gromowa i Jørgensena (niestety nie wiemy, o których pracach mowa). W mniej więcej tym samym czasie Wielenberg [469] spostrzegł, że pewne podgrupy klasycznej grupy Picarda działają jako izometrie na górną półprzestrzeń hiperboliczną wymiaru 3 mają podstawowe wielościany, które są takie same jako zbiory, ale różnią się jeśli chodzi o utożsamienie ze sobą ścian. Wynika stąd, że istnieją dowolnie duże kolizje wśród węzłów hiperbolicznych.

Chociaż mutanty mają tę samą objętość hiperboliczną (fakt 7.2.26), to praktyka pokazuje, że niezmiennik vol dobrze wspomaga proces tablicowania węzłów.

■ **Przykład 7.7.20** $\operatorname{vol} 4_1 = -6\int_0^{\pi/3} \log|2\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta \approx 2.0298832.$ ■

Żaden węzeł hiperboliczny nie ma mniejszej objętości, mówi o tym fakt 7.7.29.

■ **Przykład 7.7.21** $\operatorname{vol} 5_2 \approx 2.82812.$ ■

W encyklopedii Wolfram Mathworld znajduje się informacja, że 5_2 oraz pewien węzeł o dwunastu skrzyżowaniach mają tę samą objętość, prawdopodobnie chodzi tu o $12n_{242}$, który znany jest także jako $(-2,3,7)$-precel.

■ **Przykład 7.7.22** $\operatorname{vol} 6_1 \approx 3.16396$. ■

Objętości węzłów 4_1, 5_2 i 6_1 znajdują się w pracy Kaszajewa [209, s. 6].

■ **Przykład 7.7.23** $\operatorname{vol} 6_2 \approx 4.40083$. ■

■ **Przykład 7.7.24** Niech K będzie jednym z dwóch węzłów w parze Perko. Wtedy $\operatorname{vol} K \approx 5.63877$. ■

■ **Przykład 7.7.25** $\operatorname{vol} 6_3 \approx 5.69302$. ■

Praca Futera, Kalfagianni, Purcell [148] wspomina kilka przyjemnych ograniczeń, jakie musi spełniać objętość. Aby je przytoczyć, musimy najpierw zdefiniować dwie stałe: v_4 oraz v_8, objętości idealnego czworościanu (albo rozmaitości Giesekinga, powstałej z czworościanu przez usunięcie wierzchołków i sklejenie ściany 012 z 310 oraz 023 z 32; dopełnienie ósemki jest podwójnym nakryciem tej rozmaitości) oraz ośmiościanu foremnego w $\mathbb{H}^3$. Mamy

$$v_4 = \int_0^{2\pi/3} \log(2\cos(\theta/2))\,\mathrm{d}\theta \approx 1.01494\,16064, \tag{7.68}$$

$$v_8 = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \approx 3.66386\,23767. \tag{7.69}$$

I tak najpierw Adams [1] pokazał w swojej rozprawie doktorskiej:

Fakt 7.7.26 Niech L będzie splotem o $\operatorname{cr} L \geqslant 5$ skrzyżowaniach z diagramem D, który realizuje indeks skrzyżowaniowy. Wtedy

$$\operatorname{vol} L \leqslant 4(\operatorname{cr} D - 4)v_4. \tag{7.70}$$

A trzy dekady później poprawił swój wynik w [5]:

Fakt 7.7.27 Niech L będzie splotem o $\operatorname{cr} L \geqslant 5$ skrzyżowaniach z diagramem D, który realizuje indeks skrzyżowaniowy. Wtedy

$$\operatorname{vol} L \leqslant (\operatorname{cr} D - 5)v_8 + 4v_4. \tag{7.71}$$

Jego metoda polega na podzieleniu dopełnienia splotu na czterościany i ośmiościany oraz policzeniu ich. To, w połączeniu ze znanymi ograniczeniami na objętość „cegiełek”, wystarcza. Podział na ośmiościany zaproponował Dylan (nie William!) Thurston.

Fakt 7.7.28 Zbiór

$$\{\operatorname{vol} K : K \text{ jest hiperboliczny}\} \subseteq \mathbb{R} \tag{7.72}$$

jest dobrze uporządkowany, typu porządkowego ω^ω.

Niedowód. Zdaniem angielskiej Wikipedii, dowód jest gdzieś w [339] (gdzie Neumann, Zagier znajdują eleganckie oszacowanie zmiany objętości po wykonaniu chirurgii Dehna), my tego

nie widzimy. Hodgson, Masai [189] sugerują, żeby przeczytać notatki Thurstona [437]. Jeszcze jedną wzmiankę znaleźliśmy w starszej pracy Thurstona [435, s. 365]. ■

W dowolnej rodzinie węzłów istnieje element o najmniejszej objętości. Przytoczymy teraz przykłady konkretnych rodzin i najmniejszych węzłów, za Futerem, Kalfagiannim, Purcell [148, s. 16-17] oraz Hodgsonem, Masaiem [189, s. 296].

Fakt 7.7.29 Żaden węzeł nie ma mniejszej objętości hiperbolicznej od ósemki.

Niedowód. Cao, Meyerhoff [72] przeanalizowali pakowania horokul w uniwersalnym nakryciu związanym z rozmaitościami. Doszli do wniosku, że nie ma tam dostatecznie wolnego miejsca, jeżeli szpic nie jest odpowiedniego rozmiaru. Trzykrotnie wspierają się przy tym pomocą komputera, by sprawdzić, że określone warunki są spełnione we wszystkich punktach danej przestrzeni parametrów. ■

Nie jesteśmy pewni, jak powinno tłumaczyć się angielskie *cusp*; w literaturze spotkaliśmy czasami termin ostrze. Chcielibyśmy zaproponować słowo szpic. Rozmaitość szpiczasta (czyli niezwarta, zupełna hiperboliczna rozmaitość ze skończoną objętością Riemanna) byłaby wtedy polskim odpowiednikiem *cusped manifold*.

Fakt 7.7.30 Wśród orientowalnych 3-rozmaitości ze szpicem najmniejszą objętość ma dopełnienie ósemki oraz jego bliźniak, otrzymany przez $(5,1)$-chirurgię jednego z ogniw splotu Whiteheada.

Klasa rozmaitości wspomniana w fakcie obejmuje dopełnienia hiperbolicznych węzłów. Powyższy fakt także został wzięty z pracy [72]. Meyerhoff, już bez Cao, nie przestawał pracować nad rozmaitościami o małych objętościach i osiem lat później przedstawił z Gabaiem, Milleyem [150] bez dowodu:

Fakt 7.7.31 Istnieje 10 orientowalnych 3-rozmaitości z jednym szpicem o objętości co najwyżej 2.848: `m003`, `m004` (2.02988...), `m006`, `m007` (2.56897...), `m009`, `m010` (2.66674...), `m011` (2.78183...), `m015`, `m016` oraz `m017` (2.82812...). Nazwy pochodzą ze spisu rozmaitości programu SnapPy.

Chociaż panowie obiecali pokazać dowód później, nam nie udało się go odszukać. Za to udało się rozszyfrować niektóre nazwy. `m003` to siostra 4_1, `m004` to węzeł 4_1, `m015` to węzeł 5_2, `m016` to węzeł $12n242$, czyli znany nam już $(-2,3,7)$-precel, `m017` to siostra 5_2.

W tej samej pracy możemy jeszcze znaleźć informację, że:

Fakt 7.7.32 Istnieje dokładnie jedna hiperboliczna, domknięta 3-rozmaitość, której objętość jest najmniejsza (pośród wszystkich takich rozmaitości).

Chodzi o rozmaitość Weeksa, która powstaje przez wykonanie $(5,2)$ oraz $(5,1)$ chirurgii Dehna na dopełnieniu splotu Whiteheada. Po raz pierwszy odkrył ją Jeffrey Weeks [461] w swojej rozprawie doktorskiej oraz niezależnie trzy lata później Matwiejow, Fomenko [291]. Wiemy z `https://oeis.org/A126774`, że

$$V_{\text{Weeks}} = 0.94270\,73627\,76927\,72092\ldots \tag{7.73}$$

Następna jest rozmaitość Meyerhoffa, powstała po $(5,1)$ chirurgii na dopełnieniu ósemki. Meyerhoff sugerował w 1987, że nie istnieje rozmaitość o mniejszej objętości, ale później okazało się to nieprawdą:

$$V_{\text{Meyerhoff}} = \frac{3\sqrt{283^3}}{16\pi^6}\zeta_{x^4-x-1}(2) = 0.98136\,88288\,92232\,08809\ldots \tag{7.74}$$

Fakt 7.7.33 Wśród orientowalnych 3-rozmaitości o dwóch szpicach najmniejszą objętość mają splot Whiteheada oraz $(-2,3,8)$-precel.

Ich objętość wynosi v_8.

Niedowód. Ian Agol [10] korzystając z metod topologicznych dowodzi istnienia *niezbędnej* powierzchni, która zadaje dolne ograniczenie na objętość. Tak skutecznie krępuje rozmaitości, które mogą to ograniczenie zrealizować. ■

Przypadek trzech szpiców nie jest zbyt dobrze zrozumiany.

Fakt 7.7.34 Dopełnienie splotu 8_4^2 (wg numeracji Rolfsena, czyli L8a13 wg numeracji Thistlethwaite'a) ma najmniejszą objętość wśród orientowalnych 3-rozmaitości o czterech szpicach.

Jego objętość wynosi $2v_8$.

Niedowód. Rozumowanie Yoshidy [472] oparte o wspomnianą wyżej pracę Agola. ■

7.7.6 Symetrie węzłów hiperbolicznych

Przytoczone niżej dwa fakty nie są do niczego potrzebne, ale uważamy je za coś uroczego.

Fakt 7.7.35 Niech G oznacza grupę izometrii wnętrza dopełnienia węzła hiperbolicznego. Wtedy G jest diedralna lub skończona cykliczna.

Niedowód. Pierwszy był Riley [383, s. 124], można też zapoznać się z późniejszą pracą Kodamy, Sakumy [234]. ■

Kawauchi [219, s. 131] wprowadza jeszcze jedną grupę (grupę symetrii węzła): iloraz grupy PL automorfizmów pary (S^3, K) przez podgrupę elementów, które są otaczająco izotopijne z odwzorowaniem tożsamościowym. Okazuje się, że nie wszystkie są skończone:

Fakt 7.7.36 Następujące warunki są równoważne – węzeł K ma skończoną grupę symetrii; węzeł K jest hiperboliczny, torusowy albo kablem węzła torusowego.

Kawauchi nie podaje dowodu, ale zaleca zajrzeć do pracy Sakumy. My zajrzeliśmy i dalej nie mamy pojęcia, jak ten dowód miałby wyglądać.

7.8 Węzły plastrowe i taśmowe

Musimy oznajmić z przykrością, że jest to już ostatnia sekcja książki. Poruszymy tutaj ważne z punktu widzenia współczesnej teorii węzłów zagadnienia czterowymiarowe: wprowadzamy węzły plastrowe i taśmowe, definiujemy relację zgodności oraz przytaczamy tyle wyników o grupie zgodności, ile tylko jesteśmy w stanie zrozumieć, czyli nie za wiele. Ze względu na znaczne ubytki wiedzy, ograniczamy się do zreferowania tekstu Kawauchiego [219, s. 154-169], miejscami tylko wspominając odsyłacze do literatury, które wydają się nam pomocne. Wiele wyników, jakie podamy w tej sekcji, pochodzi z artykułu Foxa, Milnora [141], od którego wszystko się zaczęło.

O węzłach plastrowych i taśmowych pisali: Burde, Zieschang, Heusener [64, s. 26, 27].

Adnotacja tłumacza: być może jesteśmy pierwszymi osobami piszącymi o tych obiektach po polsku, dlatego nie mamy pewności, czy podane tutaj tłumaczenie „plastrowy" przyjmie się. Inny przymiotnik godny rozważenia to „wstęgowy".

Definicja 7.8.1 — węzeł topologicznie plastrowy. Węzeł K w sferze S^3, który jest brzegiem lokalnie płaskiego dysku D w kuli B^4 nazywamy węzłem topologicznie plastrowym. Dysk D, kiedy potrzebuje mieć nazwę, też jest dyskiem plastrowym.

Jeśli nie jest podane inaczej, „plastrowy" to synonim „topologicznie plastrowego".

Definicja 7.8.2 — węzeł gładko plastrowy. Węzeł K w sferze S^3, który jest brzegiem gładkiego dysku D w kuli B^4 nazywamy węzłem gładko plastrowym.

Następujące węzły o mniej niż jedenastu skrzyżowaniach są plastrowe (topologicznie oraz gładko): 6_1, 8_8, 8_9, 8_{20}, 9_{27}, 9_{41}, 9_{46}, 10_3, 10_{22}, 10_{35}, 10_{42}, 10_{48}, 10_{75}, 10_{87}, 10_{99}, 10_{123}, 10_{129}, 10_{137}, 10_{140}, 10_{153} oraz 10_{155}. Wśród pierwszych węzłów do dwunastu skrzyżowań najdłużej opierał się węzeł Conwaya, aż Lisa Piccirillo [359] pokazała, że nie jest gładko plastrowy (ale za to jest topologicznie plastrowy).

Fakt 7.8.3 Niech K będzie węzłem. Wtedy suma $K \# \operatorname{mr} K$ jest węzłem plastrowym.

Niedowód. Kawauchi [219, s. 155] pisze, że wystarczy wybrać 3-kulę $B \subseteq S^3$ taką, że $K \cap B$ jest trywialnym łukiem w B. Wtedy 4-kula $\operatorname{cl}(S^3 \setminus B) \times [0,1]$ oraz lokalnie płaski dysk $\operatorname{cl}(K \setminus K \cap B) \times [0,1]$ są świadkami plastrowości węzła $K \# \operatorname{mr} K$. ■

Fakt 7.8.4 Albo wszystkie trzy węzły $K_1, K_2, K_1 \# K_2$ są plastrowe, albo co najwyżej jeden z nich.

Dowód. Kawauchi [219, s. 155] pisze: załóżmy, że K_1, K_2 są plastrowe, z plastrowymi dyskami $D_1, D_2 \subseteq B^4$. Wtedy suma brzegowa[7] $(B^4, D_1) \natural (B^4, D_2)$ pokazuje, że węzeł $K_1 \# K_2$ jest plastrowy.

Załóżmy teraz, że $K_1, K_3 = K_1 \# K_2$ są plastrowe, z plastrowymi dyskami $D_1, D_3 \subseteq B^4$. Wybierzmy 3-kule B_1, B_3 wewnątrz S^3 tak, że domknięcie $K_1 \setminus B_1 \cap K_1$ jest trywialnym łukiem w domknięciu $S^3 \setminus B_1$. Wtedy coś tam dalej, ale nie warto tego przepisywać, bo i tak za trudne na tę książkę. ■

[7] Cokolwiek to jest!

Pierwszym poważnym wynikiem z dziedziny teorii węzłów plastrowych, pochodzącym jeszcze z pracy [141], był:

Fakt 7.8.5 — warunek Foxa-Milnora. Niech K będzie węzłem plastrowym. Wtedy jego wielomian Alexandera jest postaci $\Delta(t) = f(t)f(1/t)$ dla pewnego wielomianu Laurenta $f(t) \in \mathbb{Z}[t, 1/t]$.

Wniosek 7.8.6 Wyznacznik węzła plastrowego jest kwadratem.

Dowód. Mamy $\det K = |\Delta_K(-1)| = f(-1)f(-1)$. ■

Ten prosty test stwierdza, że 2743 spośród 2977 węzłów o mniej niż 13 skrzyżowaniach nie jest plastrowych.

Fakt 7.8.7 Niech K będzie węzłem plastrowym. Wtedy $\sigma(K) = 0$.

Niedowód. Można zajrzeć do Lickorisha [261, s. 90] i Murasugiego [321, twierdzenie 8.8]; nie wiadomo, kto pierwszy uznał, że warto tego dowieść. ■

Test ten eliminuje kolejne 45 węzłów poniżej 13 skrzyżowań.

Fakt 7.8.8 Niech K będzie węzłem plastrowym. Wtedy $\operatorname{Arf} K = 0$.

Dowód. Składniki dowodu już są, wystarczy je teraz wszystkie wymieszać w dobrej kolejności. Wniosek 7.8.6 mówi, $\det K$ jest kwadratem, zaś fakt 4.3.10, że $\det K$ jest nieparzyste. Zatem $\det K \equiv 1 \pmod 8$ i fakt 6.3.3 (warunkek Murasugiego) orzeka $\operatorname{Arf} K = 0$. ■

Ostatni fakt, jaki podamy we wprowadzeniu, to jedno z niewielu miejsc w całej książce, gdzie dotykamy różnic między kategorią Top oraz PL.

Fakt 7.8.9 Niech K będzie węzłem w kategorii Top. Jeżeli jego wielomian Alexandera jest trywialny: $\Delta_K(t) \equiv 1$, to węzeł K jest plastrowy.

Twierdzenie to jest bardzo łatwo napotkać przeglądając prezentacje poświęcone węzłom plastrowym, ale nikt nie chce się przyznać, kto jest jego ojcem. Odpowiedź znaleźliśmy dopiero w artykule „The degree of the Alexander polynomial is an upper bound for the topological slice genus" Petera Fellera! Miło, że mu się chciało.

Dowód. Freedman [143, tw. 1.13]. ■

Implikacja 7.8.9 przestaje być prawdziwa po przejściu do kategorii Diff. Wydawało nam się kiedyś, że Gompf [163] dobrze tłumaczy tę różnicę przy użyciu twierdzenia Donaldsona. (Do tego artykułu odsyła encyklopedia węzłów [9]). Dzisiaj wiemy, że nic nie wiemy.

7.8.1 Węzły skręcone

Nie potrafiliśmy znaleźć lepszego miejsca dla tej podsekcji, między innymi przez fakt 7.8.13, który wymaga znajomości przymiotnika „plastrowy". Węzły skręcone uważa się za najprostszą (po torusowych) rodzinę węzłów. Wspomina o nich bardzo krótko Kawauchi [219, s. 31].

Definicja 7.8.10 Węzeł powstały najpierw przez n-krotne półskręcanie domkniętej pętli, a następnie splecienie końców, nazywamy węzłem skręconym.

Węzły skręcone to dokładnie towarzyszące niewęzłowi w węzłach satelitarnych, tak zwane whiteheadowskie duble niewęzła. Wszystkie są odwracalne (ale tylko niewęzeł oraz ósemka są zwierciadlane) i mają liczbę gordyjską 1, ponieważ wystarczy rozwiązać skrzyżowanie, które plotło końce. Każdy jest dwumostowy (ćwiczenie u Rolfsena [385, s. 114]) i posiada zerową sygnaturę. Dalsze własności węzłów skręconych zależą od n, ilości półskrętów. Indeks skrzyżowaniowy wynosi $n+2$.

Fakt 7.8.11 Niech K będzie węzłem n-skręconym. Wtedy

$$2\nabla(z) = \begin{cases} 2+(n+1)z^2 & n \text{ nieparzyste} \\ 2-nz^2 & n \text{ parzyste} \end{cases} \tag{7.75}$$

Fakt 7.8.12 Niech K będzie węzłem n-skręconym. Wtedy

$$(q+1)V(q) = \begin{cases} 1+q^{-2}+q^{-n}-q^{-n-3} & n \text{ nieparzyste} \\ q^3(1+q^{-2}-q^{-n}+q^{-n-3}) & n \text{ parzyste} \end{cases} \tag{7.76}$$

Fakt 7.8.13 Żaden węzeł skręcony poza niewęzłem 0_1 oraz węzłem dokerskim 6_1 nie jest plastrowy.

Dowód. Casson, Gordon [74]. ■

7.8.2 Zgodność

Zgodność jest relacją równoważności na zbiorze węzłów, która prowadzi do nowej definicji węzłów plastrowych (patrz fakt 7.8.15). My przytaczamy jej definicję z pracy Gompfa [163]:

Definicja 7.8.14 — zgodność. Dwa węzły K_0, K_1 nazywamy (gładko) zgodnymi, jeżeli zbiór

$$K_0 \times \{0\} \cup K_1 \times \{1\} \tag{7.77}$$

jest brzegiem pewnego pierścienia gładko zanurzonego w $S^3 \times I$.

Kawauchi [219, s. 156] pisze *„Two knots (...) are knot cobordant (or concordant)"*, więc tak jak wielu innych autorów nie odróżnia węzłów kobordantnych od zgodnych. Mamy zamiar zrobić dokładnie to samo: różnica między tymi terminami jest subtelna; węzły zgodne są też kobordantne, ale implikacja w drugą stronę nie zachodzi (wiemy o tym z tekstu Blanlœila „Cobordism and Concordance of Knots") chyba, że pracuje się z węzłami sferycznymi, a tak jest w klasycznej teorii węzłów.

Dlatego my będziemy zawsze pisać o węzłach zgodnych i nigdy o kobordantnych.

Fakt 7.8.15 Dwa węzły K_1, K_2 są zgodne wtedy i tylko wtedy, gdy suma $(\mathrm{mr}\, K_2) \# K_1$ jest plastrowa.

Dowód. Ćwiczenie 12.1.3 w książce Kawauchiego [219]. ■

Definicja 7.8.16 Węzeł zgodny z niewęzłem nazywamy plastrowym.

„Bycie zgodnym" jest relacją równoważności, słabszą od „bycia izotopijnym", ale chyba mocniejszą od „bycia homotopijnym". Klasę abstrakcji węzła K oznaczamy przez $[K]$.

Definicja 7.8.17 — grupa zgodności. Niech C^1 oznacza iloraz zbioru wszystkich węzłów przez relację zgodności. Zbiór C^1 wyposażony w działanie

$$[K_1] + [K_2] = [K_1 \# K_2] \tag{7.78}$$

staje się grupą abelową, nazywaną grupą zgodności. Jej elementem neutralnym jest klasa abstrakcji niewęzła. Elementem przeciwnym do $[K]$ jest $[\mathrm{mr}\, K]$.

Niech Θ oznacza rodzinę macierzy Seiferta węzłów (czyli kwadratowych macierzy V o całkowitych wyrazach takich, że $\det(V - V^T) = 1$). Mówimy, że macierz $V \in \Theta$ jest zerowo kobordantna, jeżeli jest postaci

$$V = P \begin{pmatrix} 0 & V_{21} \\ V_{12} & V_{22} \end{pmatrix} P^{-1} \tag{7.79}$$

dla pewnej całkowitoliczbowej macierzy P o wyznaczniku ± 1; takie macierze nazywamy unimodularnie sprzężonymi. Każda zerowo kobordantna macierz $V \in \Theta$ stanowi macierz Seiferta pewnego plastrowego węzła K. Kawauchi nazywa te węzły algebraicznie plastrowymi i mówi, że to dokładnie węzły, które ograniczają izotropowe powierzchnie w kuli B^4, więc każdy węzeł plastrowy jest algebraicznie plastrowy.

Suma $(-V) \oplus V$ jest zerowo kobordantna dla każdej macierzy $V \in \Theta$. To (chyba to) inspiruje Kawauchiego do wprowadzenia kolejnej definicji: dwie macierze $V_1, V_2 \in \Theta$ nazywa kobordantnymi, jeżeli $(-V_1) \oplus V_2$ jest zerowo kobordantna. Kobordyzm stanowi relację równoważności na Θ – iloraz Θ przez tę relację oznacza się G_-, jest grupą abelową.

Fakt 7.8.18 Odwzorowanie $\psi\colon C^1 \to G_-$ posyłające klasę abstrakcji węzła w klasę abstrakcji jego macierzy Seiferta jest dobrze określonym epimorfizmem.

Dowód. Nie umiemy nic udowodnić, więc wymienimy tylko trzy odsyłacze: z faktu **??** wynika, że odwzorowanie ψ jest dobrze określone, dowód faktu 6.2.45 pokazuje, że ψ jest homomorfizmem, zaś w [219, s. 62] można przeczytać, dlaczego jest „na". ■

Funkcję ψ rozpatrywał Levine [258] w latach sześćdziesiątych. Po mniej niż dekadzie Casson, Gordon [73] wskazali nietrywialne elementy jądra. Potem był wynik Jianga [200], że jądro nie jest skończenie generowalne, bo zawiera izomorficzną kopię $\mathbb{Z}^\infty$, a jeszcze później Livingstona [275], że zawiera też kopię $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\infty$.

Fakt 7.8.19 $G_- \cong \mathbb{Z}^\infty \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\infty \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\infty$.

Kawauchi [219, s. 161] bez uzasadnienia postanawia nie przytoczyć dowodu tego faktu, ale opowiada krótko, jaka jest idea przewodnia i odsyła wprost do pracy Levine'a. Na dalszych stronach jego pracy przeglądowej pojawiają się jakieś formy kwadratowe oraz uogólnienia wszystkiego do zgodności splotów, ale wracamy nocnym pociągiem i zaraz uśniemy...

7.8.3 Węzły taśmowe

Definicja 7.8.20 Węzeł $K = f[S^1]$ będący brzegiem osobliwego dysku $f\colon D \to S^3$ posiadającego własność: każda przecinająca siebie składowa jest łukiem $A \subseteq f(D^2)$, dla którego $f^{-1}[A]$ składa się z dwóch łuków w D^2 (jeden z nich jest wewnętrzny), nazywamy taśmowym.

Jak pisze Kawauchi, mamy oczywiste wynikanie:

Fakt 7.8.21 Każdy węzeł taśmowy jest plastrowy.

Dawno temu Fox [226, problem 1.33] zapytał, czy implikacja odwrotna jest prawdziwa:

Hipoteza 7.8.22 (slice-ribbon problem)**.** *Czy każdy węzeł plastrowy jest taśmowy?*

Wprawdzie Lisca [270] pokazał prawdziwość hipotezy dla węzłów dwumostowych, zaś Greene oraz Jabuka [173] zrobili to dla precli o trzech pasmach; ale Gompf, Scharlemann i Thompson [164] zasugerowali potencjalny kontrprzykład. Nie możemy przytoczyć tu tego kontrprzykładu, gdyż korzysta z rozmaitości szwowych, opisanych w [219, s. 53-59].

Teichner myśli[8] o hipotezie plastrowo-taśmowej jako o życzeniu, które uprościłoby pewne czterowymiarowe problemy, gdyby było prawdziwe.

[8] Patrz https://mathoverflow.net/a/18154.

IV Załączniki

Appendices 187

A Tablice węzłów pierwszych 187
A.1 Wartości niezmienników 187
A.2 Diagramy węzłów pierwszych do dziesięciu skrzyżowań 253

B Tablice splotów 263
B.1 Diagramy splotów pierwszych do dziewięciu skrzyżowań 263

C Tablice węzłów wirtualnych 269
C.1 Diagramy węzłów wirtualnych 269

D Notacja, użyte symbole 275

E Słownik angielsko-polski 277

A. Tablice węzłów pierwszych

A.1 Wartości niezmienników

Ta sekcja zawiera dwie tabele, zacznijmy od opisu drugiej. Przedstawia ona węzły pierwsze o co najwyżej dwunastu skrzyżowaniach oraz wartości ich niezmienników (całkowitoliczbowych lub wielomianowych). Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi w reszcie książki, u, b, br to kolejno liczba gordyjska, warkoczowa i mostowa. Zapis $2..3$ mówi, że dokładna wartość nie jest znana i leży w przedziale $[2, 3]$. Jeśli liczba mostowa wynosi dokładnie 2, zamiast niej podajemy nieskracalny ułamek p/q, który koduje węzeł. Dalej, det jest wyznacznikiem, σ sygnaturą. Wielomian Conwaya $\nabla(z)$ dla oszczędności miejsca podajemy jako ciąg współczynników, na przykład $1\ -1$ jest skrótem od $1 - z^2$. Ostatnia kolumna mówi, czy węzeł alternuje.

Pierwsza tabela stanowi podsumowanie drugiej: mówi, ile różnych wartości przybiera dany niezmiennik wśród węzłów o danej liczbie skrzyżowań. Jak widać, wielomian Conwaya radzi sobie najlepiej, ale nie doskonale. Dane pochodzą z portalu KnotInfo [277] (założonego w 2004 roku przez Charlesa Livingstona, do którego dołączył wkrótce Jae Choon Cha. W 2019 roku w rozwoju strony zaczęli brać udział jeszcze Allison Moore oraz Eric Ost), gdzie znaleźć można opisy wszystkich niezmienników z tabeli oraz wiele więcej danych, gorąco zachęcamy do odwiedzin tej strony internetowej.

Tabela pierwsza podsumowuje tabelę drugą:

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.	all
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	2	2	1	2	2	2	1	1	2
6	1	2	1	3	2	3	2	1	3
7	3	3	1	7	4	7	1	1	7
8	3	3	2	16	5	21	3	2	21
9	4	4	2	29	7	48	2	2	49
10	5	4	2	56	7	150	4	2	165
11	10	5	3	100	9	419	2	2	552
12	10	5	3	167	8	1513	5	2	2176

Tabela druga zawiera wartości niezmienników:

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
3_1	1	2	$^{3}/_{1}$	3	-2	$1+1$	odwracalny	tak
4_1	1	3	$^{5}/_{2}$	5	0	$1-1$	całkowicie	tak
5_1	2	2	$^{5}/_{1}$	5	-4	$1+3+1$	odwracalny	tak
5_2	1	3	$^{7}/_{3}$	7	-2	$1+2$	odwracalny	tak
6_1	1	4	$^{9}/_{7}$	9	0	$1-2$	odwracalny	tak
6_2	1	3	$^{11}/_{4}$	11	-2	$1-1-1$	odwracalny	tak
6_3	1	3	$^{13}/_{5}$	13	0	$1+1+1$	całkowicie	tak
7_1	3	2	$^{7}/_{1}$	7	-6	$1+6+5+1$	odwracalny	tak
7_2	1	4	$^{11}/_{5}$	11	-2	$1+3$	odwracalny	tak
7_3	2	3	$^{13}/_{9}$	13	-4	$1+5+2$	odwracalny	tak
7_4	2	4	$^{15}/_{11}$	15	-2	$1+4$	odwracalny	tak
7_5	2	3	$^{17}/_{7}$	17	-4	$1+4+2$	odwracalny	tak
7_6	1	4	$^{19}/_{7}$	19	-2	$1+1-1$	odwracalny	tak
7_7	1	4	$^{21}/_{8}$	21	0	$1-1+1$	odwracalny	tak
8_1	1	5	$^{13}/_{11}$	13	0	$1-3$	odwracalny	tak
8_2	2	3	$^{17}/_{6}$	17	-4	$1+0-3-1$	odwracalny	tak
8_3	2	5	$^{17}/_{4}$	17	0	$1-4$	całkowicie	tak
8_4	2	4	$^{19}/_{14}$	19	2	$1-3-2$	odwracalny	tak
8_5	2	3	3	21	-4	$1-1-3-1$	odwracalny	tak
8_6	2	4	$^{23}/_{10}$	23	-2	$1-2-2$	odwracalny	tak
8_7	1	3	$^{23}/_{9}$	23	2	$1+2+3+1$	odwracalny	tak
8_8	2	4	$^{25}/_{9}$	25	0	$1+2+2$	odwracalny	tak
8_9	1	3	$^{25}/_{7}$	25	0	$1-2-3-1$	całkowicie	tak
8_{10}	2	3	3	27	2	$1+3+3+1$	odwracalny	tak
8_{11}	1	4	$^{27}/_{10}$	27	-2	$1-1-2$	odwracalny	tak
8_{12}	2	5	$^{29}/_{12}$	29	0	$1-3+1$	całkowicie	tak
8_{13}	1	4	$^{29}/_{11}$	29	0	$1+1+2$	odwracalny	tak
8_{14}	1	4	$^{31}/_{12}$	31	-2	$1+0-2$	odwracalny	tak
8_{15}	2	4	3	33	-4	$1+4+3$	odwracalny	tak
8_{16}	2	3	3	35	2	$1+1+2+1$	odwracalny	tak
8_{17}	1	3	3	37	0	$1-1-2-1$	-zwierciadlany	tak
8_{18}	2	3	3	45	0	$1+1-1-1$	całkowicie	tak
8_{19}	3	3	3	3	-6	$1+5+5+1$	odwracalny	nie
8_{20}	1	3	3	9	0	$1+2+1$	odwracalny	nie
8_{21}	1	3	3	15	-2	$1+0-1$	odwracalny	nie
9_1	4	2	$^{9}/_{1}$	9	-8	$1+10+15+7+1$	odwracalny	tak
9_2	1	5	$^{15}/_{7}$	15	-2	$1+4$	odwracalny	tak
9_3	3	3	$^{19}/_{13}$	19	-6	$1+9+9+2$	odwracalny	tak
9_4	2	4	$^{21}/_{5}$	21	-4	$1+7+3$	odwracalny	tak
9_5	2	5	$^{23}/_{17}$	23	-2	$1+6$	odwracalny	tak
9_6	3	3	$^{27}/_{5}$	27	-6	$1+7+8+2$	odwracalny	tak
9_7	2	4	$^{29}/_{13}$	29	-4	$1+5+3$	odwracalny	tak
9_8	2	5	$^{31}/_{11}$	31	-2	$1+0-2$	odwracalny	tak
9_9	3	3	$^{31}/_{9}$	31	-6	$1+8+8+2$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
9_{10}	3	4	$^{33}/_{23}$	33	-4	$1+8+4$	odwracalny	tak
9_{11}	2	4	$^{33}/_{14}$	33	4	$1+4-1-1$	odwracalny	tak
9_{12}	1	5	$^{35}/_{13}$	35	-2	$1+1-2$	odwracalny	tak
9_{13}	3	4	$^{37}/_{27}$	37	-4	$1+7+4$	odwracalny	tak
9_{14}	1	5	$^{37}/_{14}$	37	0	$1-1+2$	odwracalny	tak
9_{15}	2	5	$^{39}/_{16}$	39	2	$1+2-2$	odwracalny	tak
9_{16}	3	3	3	39	-6	$1+6+7+2$	odwracalny	tak
9_{17}	2	4	$^{39}/_{14}$	39	-2	$1-2+1+1$	odwracalny	tak
9_{18}	2	4	$^{41}/_{17}$	41	-4	$1+6+4$	odwracalny	tak
9_{19}	1	5	$^{41}/_{16}$	41	0	$1-2+2$	odwracalny	tak
9_{20}	2	4	$^{41}/_{15}$	41	-4	$1+2-1-1$	odwracalny	tak
9_{21}	1	5	$^{43}/_{18}$	43	2	$1+3-2$	odwracalny	tak
9_{22}	1	4	3	43	-2	$1-1+1+1$	odwracalny	tak
9_{23}	2	4	$^{45}/_{19}$	45	-4	$1+5+4$	odwracalny	tak
9_{24}	1	4	3	45	0	$1+1-1-1$	odwracalny	tak
9_{25}	2	5	3	47	-2	$1+0-3$	odwracalny	tak
9_{26}	1	4	$^{47}/_{18}$	47	2	$1+0+1+1$	odwracalny	tak
9_{27}	1	4	$^{49}/_{19}$	49	0	$1+0-1-1$	odwracalny	tak
9_{28}	1	4	3	51	-2	$1+1+1+1$	odwracalny	tak
9_{29}	2	4	3	51	2	$1+1+1+1$	odwracalny	tak
9_{30}	1	4	3	53	0	$1-1-1-1$	odwracalny	tak
9_{31}	2	4	$^{55}/_{21}$	55	-2	$1+2+1+1$	odwracalny	tak
9_{32}	2	4	3	59	2	$1-1+0+1$	chiralny	tak
9_{33}	1	4	3	61	0	$1+1+0-1$	chiralny	tak
9_{34}	1	4	3	69	0	$1-1+0-1$	odwracalny	tak
9_{35}	3	5	3	27	-2	$1+7$	odwracalny	tak
9_{36}	2	4	3	37	4	$1+3-1-1$	odwracalny	tak
9_{37}	2	5	3	45	0	$1-3+2$	odwracalny	tak
9_{38}	3	4	3	57	-4	$1+6+5$	odwracalny	tak
9_{39}	1	5	3	55	2	$1+2-3$	odwracalny	tak
9_{40}	2	4	3	75	-2	$1-1-1+1$	odwracalny	tak
9_{41}	2	5	3	49	0	$1+0+3$	odwracalny	tak
9_{42}	1	4	3	7	2	$1-2-1$	odwracalny	nie
9_{43}	2	4	3	13	-4	$1+1-3-1$	odwracalny	nie
9_{44}	1	4	3	17	0	$1+0+1$	odwracalny	nie
9_{45}	1	4	3	23	2	$1+2-1$	odwracalny	nie
9_{46}	2	4	3	9	0	$1-2$	odwracalny	nie
9_{47}	2	4	3	27	-2	$1-1+2+1$	odwracalny	nie
9_{48}	2	4	3	27	2	$1+3-1$	odwracalny	nie
9_{49}	3	4	3	25	-4	$1+6+3$	odwracalny	nie
10_1	1	6	$^{17}/_{15}$	17	0	$1-4$	odwracalny	tak
10_2	3	3	$^{23}/_{8}$	23	-6	$1+2-5-5-1$	odwracalny	tak
10_3	2	6	$^{25}/_{6}$	25	0	$1-6$	odwracalny	tak
10_4	2	5	$^{27}/_{20}$	27	2	$1-5-3$	odwracalny	tak
10_5	2	3	$^{33}/_{13}$	33	4	$1+4+7+5+1$	odwracalny	tak
10_6	3	4	$^{37}/_{16}$	37	-4	$1-1-6-2$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
10_7	1	5	$^{43}/_{16}$	43	-2	$1-1-3$	odwracalny	tak
10_8	2	4	$^{29}/_{6}$	29	-4	$1-3-7-2$	odwracalny	tak
10_9	1	3	$^{39}/_{28}$	39	-2	$1-2-7-5-1$	odwracalny	tak
10_{10}	1	5	$^{45}/_{17}$	45	0	$1+1+3$	odwracalny	tak
10_{11}	2..3	5	$^{43}/_{13}$	43	-2	$1-5-4$	odwracalny	tak
10_{12}	2	4	$^{47}/_{17}$	47	2	$1+4+6+2$	odwracalny	tak
10_{13}	2	6	$^{53}/_{22}$	53	0	$1-5+2$	odwracalny	tak
10_{14}	2	4	$^{57}/_{22}$	57	-4	$1+2-4-2$	odwracalny	tak
10_{15}	2	4	$^{43}/_{19}$	43	2	$1+3+6+2$	odwracalny	tak
10_{16}	2	5	$^{47}/_{33}$	47	-2	$1-4-4$	odwracalny	tak
10_{17}	1	3	$^{41}/_{9}$	41	0	$1+2+7+5+1$	całkowicie	tak
10_{18}	1	5	$^{55}/_{23}$	55	-2	$1-2-4$	odwracalny	tak
10_{19}	2	4	$^{51}/_{14}$	51	-2	$1+1+5+2$	odwracalny	tak
10_{20}	2	5	$^{35}/_{16}$	35	-2	$1-3-3$	odwracalny	tak
10_{21}	2	4	$^{45}/_{16}$	45	-4	$1+1-5-2$	odwracalny	tak
10_{22}	2	4	$^{49}/_{36}$	49	0	$1-4-6-2$	odwracalny	tak
10_{23}	1	4	$^{59}/_{23}$	59	2	$1+3+5+2$	odwracalny	tak
10_{24}	2	5	$^{55}/_{24}$	55	-2	$1-2-4$	odwracalny	tak
10_{25}	2	4	$^{65}/_{24}$	65	-4	$1+0-4-2$	odwracalny	tak
10_{26}	1	4	$^{61}/_{44}$	61	0	$1-3-5-2$	odwracalny	tak
10_{27}	1	4	$^{71}/_{27}$	71	2	$1+2+4+2$	odwracalny	tak
10_{28}	2	5	$^{53}/_{19}$	53	0	$1+3+4$	odwracalny	tak
10_{29}	2	5	$^{63}/_{26}$	63	-2	$1-4-1+1$	odwracalny	tak
10_{30}	1	5	$^{67}/_{26}$	67	-2	$1+1-4$	odwracalny	tak
10_{31}	1	5	$^{57}/_{25}$	57	0	$1+2+4$	odwracalny	tak
10_{32}	1	4	$^{69}/_{29}$	69	0	$1-1-4-2$	odwracalny	tak
10_{33}	1	5	$^{65}/_{18}$	65	0	$1+0+4$	całkowicie	tak
10_{34}	2	5	$^{37}/_{13}$	37	0	$1+3+3$	odwracalny	tak
10_{35}	2	6	$^{49}/_{20}$	49	0	$1-4+2$	odwracalny	tak
10_{36}	2	5	$^{51}/_{20}$	51	-2	$1+1-3$	odwracalny	tak
10_{37}	2	5	$^{53}/_{23}$	53	0	$1+3+4$	całkowicie	tak
10_{38}	2	5	$^{59}/_{25}$	59	-2	$1-1-4$	odwracalny	tak
10_{39}	2	4	$^{61}/_{22}$	61	-4	$1+1-4-2$	odwracalny	tak
10_{40}	2	4	$^{75}/_{29}$	75	2	$1+3+4+2$	odwracalny	tak
10_{41}	2	5	$^{71}/_{26}$	71	-2	$1-2-1+1$	odwracalny	tak
10_{42}	1	5	$^{81}/_{31}$	81	0	$1+0+1-1$	odwracalny	tak
10_{43}	2	5	$^{73}/_{27}$	73	0	$1+2+1-1$	całkowicie	tak
10_{44}	1	5	$^{79}/_{30}$	79	-2	$1+0-1+1$	odwracalny	tak
10_{45}	2	5	$^{89}/_{34}$	89	0	$1-2+1-1$	całkowicie	tak
10_{46}	3	3	3	31	-6	$1+0-6-5-1$	odwracalny	tak
10_{47}	2..3	3	3	41	4	$1+6+8+5+1$	odwracalny	tak
10_{48}	2	3	3	49	0	$1+4+8+5+1$	odwracalny	tak
10_{49}	3	4	3	59	-6	$1+7+10+3$	odwracalny	tak
10_{50}	2	4	3	53	-4	$1-1-5-2$	odwracalny	tak
10_{51}	2..3	4	3	67	2	$1+5+5+2$	odwracalny	tak
10_{52}	2	4	3	59	-2	$1+3+5+2$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
10_{53}	3	5	3	73	-4	$1+6+6$	odwracalny	tak
10_{54}	2..3	4	3	47	2	$1+4+6+2$	odwracalny	tak
10_{55}	2	5	3	61	-4	$1+5+5$	odwracalny	tak
10_{56}	2	4	3	65	-4	$1+0-4-2$	odwracalny	tak
10_{57}	2	4	3	79	2	$1+4+4+2$	odwracalny	tak
10_{58}	2	6	3	65	0	$1-4+3$	odwracalny	tak
10_{59}	1	5	3	75	-2	$1-1-1+1$	odwracalny	tak
10_{60}	1	5	3	85	0	$1-1+1-1$	odwracalny	tak
10_{61}	2..3	4	3	33	-4	$1-4-7-2$	odwracalny	tak
10_{62}	2	3	3	45	4	$1+5+8+5+1$	odwracalny	tak
10_{63}	2	5	3	57	-4	$1+6+5$	odwracalny	tak
10_{64}	2	3	3	51	-2	$1-3-8-5-1$	odwracalny	tak
10_{65}	2	4	3	63	2	$1+4+5+2$	odwracalny	tak
10_{66}	3	4	3	75	-6	$1+7+9+3$	odwracalny	tak
10_{67}	2	5	3	63	-2	$1+0-4$	chiralny	tak
10_{68}	2	5	3	57	0	$1+2+4$	odwracalny	tak
10_{69}	2	5	3	87	2	$1+2-1+1$	odwracalny	tak
10_{70}	2	5	3	67	2	$1-3-1+1$	odwracalny	tak
10_{71}	1	5	3	77	0	$1+1+1-1$	odwracalny	tak
10_{72}	2	4	3	73	-4	$1+2-3-2$	odwracalny	tak
10_{73}	1	5	3	83	2	$1+1-1+1$	odwracalny	tak
10_{74}	2	5	3	63	-2	$1+0-4$	odwracalny	tak
10_{75}	2	5	3	81	0	$1+0+1-1$	odwracalny	tak
10_{76}	2..3	4	3	57	-4	$1-2-5-2$	odwracalny	tak
10_{77}	2..3	4	3	63	2	$1+4+5+2$	odwracalny	tak
10_{78}	2	5	3	69	-4	$1+3+1-1$	odwracalny	tak
10_{79}	2..3	3	3	61	0	$1+5+9+5+1$	-zwierciadlany	tak
10_{80}	3	4	3	71	-6	$1+6+9+3$	chiralny	tak
10_{81}	2	5	3	85	0	$1+3+2-1$	-zwierciadlany	tak
10_{82}	1	3	3	63	-2	$1+0-4-4-1$	chiralny	tak
10_{83}	2	4	3	83	2	$1+1+3+2$	chiralny	tak
10_{84}	1	4	3	87	-2	$1+2+3+2$	chiralny	tak
10_{85}	2	3	3	57	4	$1+2+4+4+1$	chiralny	tak
10_{86}	2	4	3	85	0	$1-1-3-2$	chiralny	tak
10_{87}	2	4	3	81	0	$1+0-3-2$	chiralny	tak
10_{88}	1	5	3	101	0	$1-1+2-1$	-zwierciadlany	tak
10_{89}	2	5	3	99	2	$1+1-2+1$	odwracalny	tak
10_{90}	2	4	3	77	0	$1-3-4-2$	chiralny	tak
10_{91}	1	3	3	73	0	$1+2+5+4+1$	chiralny	tak
10_{92}	2	4	3	89	-4	$1+2-2-2$	chiralny	tak
10_{93}	2	4	3	67	2	$1+1+4+2$	chiralny	tak
10_{94}	2	3	3	71	-2	$1-2-5-4-1$	chiralny	tak
10_{95}	1	4	3	91	2	$1+3+3+2$	chiralny	tak
10_{96}	2	5	3	93	0	$1-3+1-1$	odwracalny	tak
10_{97}	2	5	3	87	-2	$1+2-5$	odwracalny	tak
10_{98}	2	4	3	81	-4	$1+0-3-2$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
10_{99}	2	3	3	81	0	$1+4+6+4+1$	całkowicie	tak
10_{100}	2..3	3	3	65	4	$1+4+5+4+1$	odwracalny	tak
10_{101}	3	5	3	85	-4	$1+7+7$	odwracalny	tak
10_{102}	1	4	3	73	0	$1-2-4-2$	chiralny	tak
10_{103}	3	4	3	75	2	$1+3+4+2$	odwracalny	tak
10_{104}	1	3	3	77	0	$1+1+5+4+1$	odwracalny	tak
10_{105}	2	5	3	91	-2	$1-1-2+1$	odwracalny	tak
10_{106}	2	3	3	75	-2	$1-1-5-4-1$	chiralny	tak
10_{107}	1	5	3	93	0	$1+1+2-1$	chiralny	tak
10_{108}	2	4	3	63	-2	$1+0+4+2$	odwracalny	tak
10_{109}	2	3	3	85	0	$1+3+6+4+1$	-zwierciadlany	tak
10_{110}	2	5	3	83	-2	$1-3-2+1$	chiralny	tak
10_{111}	2	4	3	77	-4	$1+1-3-2$	odwracalny	tak
10_{112}	2	3	3	87	2	$1+2-1-3-1$	odwracalny	tak
10_{113}	1	4	3	111	-2	$1+0+1+2$	odwracalny	tak
10_{114}	1	4	3	93	0	$1+1-2-2$	odwracalny	tak
10_{115}	2	5	3	109	0	$1+1+3-1$	-zwierciadlany	tak
10_{116}	2	3	3	95	2	$1+0-2-3-1$	odwracalny	tak
10_{117}	2	4	3	103	2	$1+2+2+2$	chiralny	tak
10_{118}	1	3	3	97	0	$1+0+2+3+1$	-zwierciadlany	tak
10_{119}	1	4	3	101	0	$1-1-2-2$	chiralny	tak
10_{120}	3	5	3	105	-4	$1+6+8$	odwracalny	tak
10_{121}	2	4	3	115	-2	$1+1+1+2$	odwracalny	tak
10_{122}	2	4	3	105	0	$1+2-1-2$	odwracalny	tak
10_{123}	2	3	3	121	0	$1-2-1+2+1$	całkowicie	tak
10_{124}	4	3	3	1	-8	$1+8+14+7+1$	odwracalny	nie
10_{125}	2	3	3	11	2	$1+3+4+1$	odwracalny	nie
10_{126}	2	3	3	19	2	$1+5+4+1$	odwracalny	nie
10_{127}	2	3	3	29	-4	$1+1-2-1$	odwracalny	nie
10_{128}	3	4	3	11	-6	$1+7+9+2$	odwracalny	nie
10_{129}	1	4	3	25	0	$1+2+2$	odwracalny	nie
10_{130}	2	4	3	17	0	$1+4+2$	odwracalny	nie
10_{131}	1	4	3	31	-2	$1+0-2$	odwracalny	nie
10_{132}	1	4	3	5	0	$1+3+1$	odwracalny	nie
10_{133}	1	4	3	19	-2	$1+1-1$	odwracalny	nie
10_{134}	3	4	3	23	-6	$1+6+8+2$	odwracalny	nie
10_{135}	2	4	3	37	0	$1+3+3$	odwracalny	nie
10_{136}	1	4	3	15	2	$1+0-1$	odwracalny	nie
10_{137}	1	5	3	25	0	$1-2+1$	odwracalny	nie
10_{138}	2	5	3	35	-2	$1-3+1+1$	odwracalny	nie
10_{139}	4	3	3	3	-6	$1+9+14+7+1$	odwracalny	nie
10_{140}	2	4	3	9	0	$1+2+1$	odwracalny	nie
10_{141}	1	3	3	21	0	$1-1-3-1$	odwracalny	nie
10_{142}	3	4	3	15	-6	$1+8+9+2$	odwracalny	nie
10_{143}	1	3	3	27	2	$1+3+3+1$	odwracalny	nie
10_{144}	2	4	3	39	-2	$1-2-3$	odwracalny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
10_{145}	2	4	3	3	2	$1+5+1$	odwracalny	nie
10_{146}	1	4	3	33	0	$1+0+2$	odwracalny	nie
10_{147}	1	4	3	27	-2	$1-1-2$	chiralny	nie
10_{148}	2	3	3	31	2	$1+4+3+1$	chiralny	nie
10_{149}	2	3	3	41	-4	$1+2-1-1$	chiralny	nie
10_{150}	2	4	3	29	-4	$1+1-2-1$	chiralny	nie
10_{151}	2	4	3	43	2	$1+3+2+1$	chiralny	nie
10_{152}	4	3	3	11	-6	$1+7+13+7+1$	odwracalny	nie
10_{153}	2	4	3	1	0	$1+4+5+1$	chiralny	nie
10_{154}	3	4	3	13	-4	$1+5+6+1$	odwracalny	nie
10_{155}	2	3	3	25	0	$1-2-3-1$	odwracalny	nie
10_{156}	1	4	3	35	2	$1+1+2+1$	odwracalny	nie
10_{157}	2	3	3	49	4	$1+4+0-1$	odwracalny	nie
10_{158}	2	4	3	45	0	$1-3-2-1$	odwracalny	nie
10_{159}	1	3	3	39	-2	$1+2+2+1$	odwracalny	nie
10_{160}	2	4	3	21	-4	$1+3-2-1$	odwracalny	nie
10_{161}	3	3	3	5	-4	$1+7+6+1$	odwracalny	nie
10_{162}	2	4	3	35	2	$1-3-3$	odwracalny	nie
10_{163}	2	4	3	51	-2	$1+1+1+1$	odwracalny	nie
10_{164}	1	4	3	45	0	$1+1+3$	odwracalny	nie
10_{165}	2	4	3	39	2	$1+2-2$	odwracalny	nie
$11a_1$	2	5	3	127	-2	$1+0+0+2$	odwracalny	tak
$11a_2$	2	5	3	137	-4	$1+2-3-3$	chiralny	tak
$11a_3$	2	4	3	115	2	$1+1-3-3-1$	chiralny	tak
$11a_4$	2	5	3	97	0	$1+0-2-2$	odwracalny	tak
$11a_5$	2	6	3	125	0	$1-3+3-1$	odwracalny	tak
$11a_6$	2	5	3	135	-2	$1-2-1+2$	odwracalny	tak
$11a_7$	2	4	3	95	2	$1+0-2-3-1$	odwracalny	tak
$11a_8$	1	5	3	117	0	$1-1-1-2$	odwracalny	tak
$11a_9$	2	4	3	65	-4	$1+0+0+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{10}$	1	5	3	107	-2	$1-1+1+2$	odwracalny	tak
$11a_{11}$	1	5	3	113	0	$1+0-1-2$	odwracalny	tak
$11a_{12}$	1	5	3	103	-2	$1-2+1+2$	odwracalny	tak
$11a_{13}$	2	6	$^{61}/_{28}$	61	0	$1-3+3$	odwracalny	tak
$11a_{14}$	2..3	4	3	133	0	$1+3+5+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{15}$	2	4	3	107	2	$1-1-3-3-1$	chiralny	tak
$11a_{16}$	2	5	3	105	0	$1-2-2-2$	odwracalny	tak
$11a_{17}$	2	6	3	123	-2	$1-1-4+1$	chiralny	tak
$11a_{18}$	2..3	5	3	127	-2	$1+4+5+3$	chiralny	tak
$11a_{19}$	2	4	3	155	-2	$1-1-2-2-1$	chiralny	tak
$11a_{20}$	2..3	5	3	113	-4	$1+0-5-3$	chiralny	tak
$11a_{21}$	2	6	3	75	-2	$1-1-5$	odwracalny	tak
$11a_{22}$	2	4	3	101	-4	$1+3+3+3+1$	chiralny	tak
$11a_{23}$	2	5	3	103	-2	$1+2+2+2$	odwracalny	tak
$11a_{24}$	2	4	3	157	0	$1+1+2+2+1$	chiralny	tak
$11a_{25}$	2	4	3	155	-2	$1-1-2-2-1$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$11a_{26}$	2	4	3	157	0	$1+1+2+2+1$	chiralny	tak
$11a_{27}$	2	5	3	143	2	$1+0-1+2$	chiralny	tak
$11a_{28}$	2	4	3	121	0	$1-2-1+2+1$	chiralny	tak
$11a_{29}$	2	5	3	115	2	$1-3+0+2$	chiralny	tak
$11a_{30}$	2	5	3	149	0	$1-1+1-2$	chiralny	tak
$11a_{31}$	2	5	3	125	-4	$1+1-4-3$	odwracalny	tak
$11a_{32}$	2	5	3	139	-2	$1+3+4+3$	odwracalny	tak
$11a_{33}$	2	4	3	95	2	$1+0-2-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{34}$	1	4	3	119	-2	$1-2-4-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{35}$	1	4	3	121	0	$1+2+4+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{36}$	2	5	3	121	0	$1+2+0-2$	odwracalny	tak
$11a_{37}$	2	5	3	93	0	$1-3-3-2$	odwracalny	tak
$11a_{38}$	2	5	3	117	0	$1-1-1-2$	chiralny	tak
$11a_{39}$	2	5	3	101	0	$1-1-6-3$	odwracalny	tak
$11a_{40}$	2	4	3	89	-4	$1+2+2+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{41}$	1	5	3	115	-2	$1+1+1+2$	odwracalny	tak
$11a_{42}$	2	6	3	107	-2	$1-1-3+1$	odwracalny	tak
$11a_{43}$	3	5	4	135	-6	$1+6+9+4$	odwracalny	tak
$11a_{44}$	2	4	4	117	0	$1+3+4+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{45}$	2..3	6	3	87	-2	$1-2-6$	odwracalny	tak
$11a_{46}$	2	5	3	87	-2	$1+2+3+2$	odwracalny	tak
$11a_{47}$	2	4	4	117	0	$1+3+4+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{48}$	2	5	3	113	4	$1+4+0-2$	odwracalny	tak
$11a_{49}$	2..3	5	3	105	-4	$1+2-5-3$	chiralny	tak
$11a_{50}$	2	6	3	83	-2	$1+1-5$	odwracalny	tak
$11a_{51}$	2	6	3	115	2	$1+1-3+1$	odwracalny	tak
$11a_{52}$	2	5	3	137	0	$1+2+1-2$	chiralny	tak
$11a_{53}$	2..3	4	3	97	4	$1+0-2+2+1$	chiralny	tak
$11a_{54}$	2	5	3	139	2	$1-1-1+2$	chiralny	tak
$11a_{55}$	2	4	3	71	2	$1+2+0-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{56}$	1	5	3	109	0	$1+1-1-2$	odwracalny	tak
$11a_{57}$	2	4	4	99	2	$1+1-2-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{58}$	2	5	3	81	0	$1+0-3-2$	odwracalny	tak
$11a_{59}$	2	6	$^{43}/_{23}$	43	-2	$1-1-3$	odwracalny	tak
$11a_{60}$	2..3	5	3	85	-4	$1+3-6-3$	odwracalny	tak
$11a_{61}$	2	6	3	103	-2	$1+2-6$	odwracalny	tak
$11a_{62}$	3	4	3	55	6	$1+6+2-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{63}$	2..3	5	3	93	4	$1+5-1-2$	odwracalny	tak
$11a_{64}$	2..3	5	3	97	4	$1+4-1-2$	odwracalny	tak
$11a_{65}$	2	6	$^{59}/_{32}$	59	2	$1+3-3$	odwracalny	tak
$11a_{66}$	2	4	3	119	2	$1+2+1-2-1$	chiralny	tak
$11a_{67}$	2	5	3	125	0	$1+1+0-2$	chiralny	tak
$11a_{68}$	2	4	3	103	-2	$1+2+2-2-1$	chiralny	tak
$11a_{69}$	1	5	3	141	0	$1+1+1-2$	chiralny	tak
$11a_{70}$	1	5	3	151	-2	$1-2-2+2$	chiralny	tak
$11a_{71}$	1	4	3	159	-2	$1+0-2-2-1$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$11a_{72}$	2	4	3	153	0	$1+2+2+2+1$	chiralny	tak
$11a_{73}$	1	4	3	177	0	$1+0-1+1+1$	odwracalny	tak
$11a_{74}$	2	4	3	73	-4	$1-2+0+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{75}$	2	5	$^{83}/_{36}$	83	-2	$1-3+2+2$	odwracalny	tak
$11a_{76}$	2	4	3	145	0	$1+0+1+2+1$	chiralny	tak
$11a_{77}$	1	5	$^{131}/_{76}$	131	2	$1+1+0+2$	odwracalny	tak
$11a_{78}$	1	5	3	123	-2	$1-1+0+2$	odwracalny	tak
$11a_{79}$	2	4	3	143	2	$1+0-1-2-1$	chiralny	tak
$11a_{80}$	1	4	3	137	0	$1-2+0+2+1$	chiralny	tak
$11a_{81}$	2	4	3	127	-2	$1+0+0-2-1$	chiralny	tak
$11a_{82}$	1	4	3	95	2	$1+0-2-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{83}$	2..3	4	3	113	-4	$1+4+4+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{84}$	2	5	$^{101}/_{57}$	101	0	$1-1-2-2$	odwracalny	tak
$11a_{85}$	2	5	$^{107}/_{47}$	107	-2	$1+3+2+2$	odwracalny	tak
$11a_{86}$	1	4	3	91	-2	$1-1-2-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{87}$	2	5	3	121	0	$1-2-1-2$	odwracalny	tak
$11a_{88}$	1	4	3	101	0	$1-1+2+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{89}$	2	5	$^{119}/_{44}$	119	-2	$1-2+0+2$	odwracalny	tak
$11a_{90}$	2	5	$^{87}/_{64}$	87	2	$1-2+2+2$	odwracalny	tak
$11a_{91}$	1	5	$^{129}/_{50}$	129	0	$1+0+0-2$	odwracalny	tak
$11a_{92}$	2	4	3	103	2	$1+2-2-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{93}$	2	5	$^{93}/_{52}$	93	0	$1+1-2-2$	odwracalny	tak
$11a_{94}$	3	4	3	107	-6	$1+7+11+4$	odwracalny	tak
$11a_{95}$	2	5	$^{73}/_{33}$	73	-4	$1+6+6$	odwracalny	tak
$11a_{96}$	1	6	$^{121}/_{50}$	121	0	$1-2+3-1$	odwracalny	tak
$11a_{97}$	2	5	3	71	-2	$1-2+3+2$	odwracalny	tak
$11a_{98}$	1	6	$^{77}/_{18}$	77	0	$1-3+4$	odwracalny	tak
$11a_{99}$	2	4	3	135	-2	$1-2-1-2-1$	odwracalny	tak
$11a_{100}$	2	5	3	141	-4	$1+1-3-3$	odwracalny	tak
$11a_{101}$	1	5	3	167	-2	$1+2+2+3$	chiralny	tak
$11a_{102}$	2	5	3	99	-2	$1-3+1+2$	chiralny	tak
$11a_{103}$	2	6	3	81	0	$1-4+4$	chiralny	tak
$11a_{104}$	1	5	3	125	0	$1+1+0-2$	chiralny	tak
$11a_{105}$	2..3	5	3	109	-4	$1+1-5-3$	odwracalny	tak
$11a_{106}$	1	4	3	93	0	$1+1+2+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{107}$	2	5	3	111	-2	$1+0+1+2$	odwracalny	tak
$11a_{108}$	2	4	3	99	2	$1+1-2-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{109}$	2	4	3	117	0	$1+3+4+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{110}$	2	5	$^{97}/_{35}$	97	0	$1+0-2-2$	odwracalny	tak
$11a_{111}$	2	5	$^{103}/_{37}$	103	-2	$1+2+2+2$	odwracalny	tak
$11a_{112}$	2	4	3	125	0	$1-3-1+2+1$	chiralny	tak
$11a_{113}$	2	4	3	109	4	$1+1-1+2+1$	chiralny	tak
$11a_{114}$	1	5	3	151	-2	$1+2+3+3$	chiralny	tak
$11a_{115}$	2	5	3	121	0	$1-2-5-3$	chiralny	tak
$11a_{116}$	2	5	3	137	-4	$1+2-3-3$	chiralny	tak
$11a_{117}$	2	5	$^{117}/_{49}$	117	-4	$1+3+0-2$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$11a_{118}$	2	5	3	87	-2	$1-2+2+2$	odwracalny	tak
$11a_{119}$	2	6	$^{77}/_{34}$	77	0	$1-3+4$	odwracalny	tak
$11a_{120}$	2	5	$^{109}/_{64}$	109	4	$1+5+0-2$	odwracalny	tak
$11a_{121}$	1	6	$^{119}/_{50}$	119	2	$1+2-3+1$	odwracalny	tak
$11a_{122}$	1	5	3	127	2	$1+0+0+2$	chiralny	tak
$11a_{123}$	3	5	3	117	-4	$1+7+9$	odwracalny	tak
$11a_{124}$	3	4	3	155	-6	$1+7+12+5$	odwracalny	tak
$11a_{125}$	2	4	3	175	-2	$1+0-3-2-1$	chiralny	tak
$11a_{126}$	2..3	4	3	145	0	$1+4+6+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{127}$	2	4	3	137	-4	$1+2+1+2+1$	chiralny	tak
$11a_{128}$	2	6	3	129	0	$1-4+3-1$	odwracalny	tak
$11a_{129}$	2	4	3	113	4	$1+0-1+2+1$	chiralny	tak
$11a_{130}$	2	5	3	123	2	$1-1+0+2$	chiralny	tak
$11a_{131}$	2	4	3	131	2	$1+1+0-2-1$	chiralny	tak
$11a_{132}$	2	5	3	135	-2	$1-2-1+2$	chiralny	tak
$11a_{133}$	2	6	3	79	-2	$1+0-5$	odwracalny	tak
$11a_{134}$	2	5	3	123	-2	$1+3+5+3$	odwracalny	tak
$11a_{135}$	2	5	3	153	0	$1-2+1-2$	odwracalny	tak
$11a_{136}$	1	5	3	163	2	$1+1-2+2$	chiralny	tak
$11a_{137}$	2..3	5	3	111	2	$1-4+0+2$	chiralny	tak
$11a_{138}$	1	5	3	161	0	$1+0+2-2$	chiralny	tak
$11a_{139}$	1	4	3	99	-2	$1+1-2-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{140}$	2	5	$^{65}/_{17}$	65	-4	$1+0-4-2$	odwracalny	tak
$11a_{141}$	2	5	3	103	2	$1-2+1+2$	chiralny	tak
$11a_{142}$	3	4	3	59	6	$1+7+2-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{143}$	2	5	3	89	4	$1+6-1-2$	odwracalny	tak
$11a_{144}$	2..3	5	$^{73}/_{56}$	73	4	$1+6-2-2$	odwracalny	tak
$11a_{145}$	2	6	$^{83}/_{22}$	83	2	$1+5-4$	odwracalny	tak
$11a_{146}$	1	4	3	123	2	$1+3+1-2-1$	chiralny	tak
$11a_{147}$	2	4	3	151	-2	$1+2-1-2-1$	chiralny	tak
$11a_{148}$	2	6	3	115	-2	$1+1-7$	odwracalny	tak
$11a_{149}$	1	5	3	127	-2	$1+0+0+2$	chiralny	tak
$11a_{150}$	2	5	3	125	4	$1+5+1-2$	chiralny	tak
$11a_{151}$	2	4	3	127	2	$1+4+1-2-1$	chiralny	tak
$11a_{152}$	2	5	3	117	0	$1+3+0-2$	chiralny	tak
$11a_{153}$	2	5	3	89	0	$1+2-2-2$	odwracalny	tak
$11a_{154}$	2	6	$^{67}/_{37}$	67	-2	$1+1-4$	odwracalny	tak
$11a_{155}$	2	5	3	171	2	$1+3+2+3$	odwracalny	tak
$11a_{156}$	2	4	3	91	2	$1+3-1-3-1$	chiralny	tak
$11a_{157}$	2	4	3	135	2	$1+2+0-2-1$	chiralny	tak
$11a_{158}$	2	4	3	119	2	$1-2-4-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{159}$	2	6	$^{111}/_{65}$	111	-2	$1+0-3+1$	odwracalny	tak
$11a_{160}$	1	4	3	145	0	$1+0+1+2+1$	odwracalny	tak
$11a_{161}$	2..3	5	3	57	4	$1+2-4-2$	odwracalny	tak
$11a_{162}$	2	4	3	167	2	$1+2+2-1-1$	chiralny	tak
$11a_{163}$	2	4	3	119	-2	$1+2+1-2-1$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$11a_{164}$	2	4	3	169	0	$1-2-2+1+1$	chiralny	tak
$11a_{165}$	2	5	3	81	0	$1+0-3-2$	odwracalny	tak
$11a_{166}$	2	6	$^{59}/_{45}$	59	-2	$1-1-4$	odwracalny	tak
$11a_{167}$	1	5	3	113	0	$1+0-1-2$	chiralny	tak
$11a_{168}$	1	5	3	125	0	$1+1+0-2$	chiralny	tak
$11a_{169}$	2	5	3	121	0	$1+2+0-2$	chiralny	tak
$11a_{170}$	2	4	3	185	0	$1+2+4+2+1$	odwracalny	tak
$11a_{171}$	2	4	3	183	-2	$1+2+1-1-1$	odwracalny	tak
$11a_{172}$	2	5	3	139	-2	$1-1-1+2$	chiralny	tak
$11a_{173}$	2	5	3	135	-2	$1+2+0+2$	odwracalny	tak
$11a_{174}$	2	4	$^{79}/_{51}$	79	2	$1+0-1-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{175}$	2	4	$^{105}/_{41}$	105	0	$1+2+3+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{176}$	2	4	$^{111}/_{31}$	111	-2	$1+0-3-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{177}$	2	4	$^{97}/_{21}$	97	-4	$1+4+3+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{178}$	2	5	$^{123}/_{89}$	123	-2	$1+3+1+2$	odwracalny	tak
$11a_{179}$	2	4	$^{57}/_{20}$	57	-4	$1-2-1+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{180}$	1	4	$^{89}/_{64}$	89	0	$1-2+1+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{181}$	2	5	3	99	-2	$1-3+1+2$	odwracalny	tak
$11a_{182}$	2	4	$^{73}/_{60}$	73	4	$1+2+1+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{183}$	2	5	$^{115}/_{34}$	115	2	$1+1+1+2$	odwracalny	tak
$11a_{184}$	1	4	$^{87}/_{68}$	87	2	$1+2-1-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{185}$	2	5	$^{109}/_{30}$	109	0	$1+1-1-2$	odwracalny	tak
$11a_{186}$	3	4	$^{95}/_{39}$	95	-6	$1+8+12+4$	odwracalny	tak
$11a_{187}$	1	5	3	117	0	$1-1-1-2$	chiralny	tak
$11a_{188}$	2	5	$^{67}/_{14}$	67	-2	$1-3+3+2$	odwracalny	tak
$11a_{189}$	1	4	3	149	0	$1-1+1+2+1$	chiralny	tak
$11a_{190}$	1	5	$^{85}/_{67}$	85	0	$1-1-3-2$	odwracalny	tak
$11a_{191}$	3	4	$^{83}/_{19}$	83	-6	$1+9+13+4$	odwracalny	tak
$11a_{192}$	3	5	$^{97}/_{71}$	97	-4	$1+8+8$	odwracalny	tak
$11a_{193}$	2	5	$^{95}/_{66}$	95	2	$1+0+2+2$	odwracalny	tak
$11a_{194}$	2	4	3	93	4	$1+1+2+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{195}$	1	6	$^{53}/_{8}$	53	0	$1-1+3$	odwracalny	tak
$11a_{196}$	2	4	3	147	2	$1+1-1-2-1$	odwracalny	tak
$11a_{197}$	2..3	5	3	143	-2	$1+4+4+3$	odwracalny	tak
$11a_{198}$	1	5	3	115	-2	$1+1+1+2$	odwracalny	tak
$11a_{199}$	2	5	3	99	2	$1-3+1+2$	chiralny	tak
$11a_{200}$	2	5	3	85	-4	$1+7+7$	odwracalny	tak
$11a_{201}$	2	6	3	81	0	$1-4+4$	chiralny	tak
$11a_{202}$	2..3	5	3	111	-2	$1-4+0+2$	odwracalny	tak
$11a_{203}$	3	4	$^{63}/_{11}$	63	-6	$1+4+1-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{204}$	2	5	$^{101}/_{71}$	101	-4	$1+3-1-2$	odwracalny	tak
$11a_{205}$	2	5	$^{91}/_{66}$	91	2	$1-1+2+2$	odwracalny	tak
$11a_{206}$	3	4	$^{47}/_{40}$	47	6	$1+8+3-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{207}$	2	5	$^{85}/_{26}$	85	4	$1+7-1-2$	odwracalny	tak
$11a_{208}$	2	5	$^{105}/_{74}$	105	4	$1+6+0-2$	odwracalny	tak
$11a_{209}$	1	6	3	141	0	$1-3+4-1$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$11a_{210}$	1	6	$^{73}/_{16}$	73	0	$1-2+4$	odwracalny	tak
$11a_{211}$	2	6	$^{67}/_{12}$	67	2	$1+5-3$	odwracalny	tak
$11a_{212}$	2	5	3	153	−4	$1+2-2-3$	odwracalny	tak
$11a_{213}$	2	5	3	145	−4	$1+4-2-3$	chiralny	tak
$11a_{214}$	2	6	3	69	0	$1-5+3$	odwracalny	tak
$11a_{215}$	2	4	3	133	−4	$1+3+1+2+1$	odwracalny	tak
$11a_{216}$	1	4	3	147	−2	$1+1-1-2-1$	chiralny	tak
$11a_{217}$	2	4	3	139	2	$1+3+0-2-1$	chiralny	tak
$11a_{218}$	2	6	3	131	2	$1+1-4+1$	chiralny	tak
$11a_{219}$	2	6	3	87	2	$1+6-4$	odwracalny	tak
$11a_{220}$	2	5	$^{85}/_{23}$	85	−4	$1+3-2-2$	odwracalny	tak
$11a_{221}$	2	4	3	79	2	$1+4+0-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{222}$	1	5	3	101	0	$1+3-1-2$	odwracalny	tak
$11a_{223}$	3	4	3	75	−6	$1+3+0-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{224}$	2	5	$^{89}/_{27}$	89	−4	$1+2-2-2$	odwracalny	tak
$11a_{225}$	2	5	$^{53}/_{42}$	53	4	$1+3-4-2$	odwracalny	tak
$11a_{226}$	1	6	$^{71}/_{20}$	71	2	$1+2-4$	odwracalny	tak
$11a_{227}$	3	4	3	143	−6	$1+8+13+5$	odwracalny	tak
$11a_{228}$	2	6	3	133	0	$1-1+4-1$	odwracalny	tak
$11a_{229}$	2	6	$^{71}/_{55}$	71	−2	$1+2-4$	odwracalny	tak
$11a_{230}$	1	6	$^{51}/_{43}$	51	−2	$1+1-3$	odwracalny	tak
$11a_{231}$	2	4	4	99	2	$1+1-2-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{232}$	2	4	3	123	2	$1-1-4-3-1$	chiralny	tak
$11a_{233}$	1	4	3	173	0	$1+1+3+2+1$	chiralny	tak
$11a_{234}$	4	3	$^{37}/_{5}$	37	−8	$1+11+21+12+2$	odwracalny	tak
$11a_{235}$	3	4	$^{71}/_{49}$	71	−6	$1+10+14+4$	odwracalny	tak
$11a_{236}$	3	4	$^{99}/_{29}$	99	−6	$1+9+12+4$	odwracalny	tak
$11a_{237}$	3	5	3	93	−4	$1+9+8$	odwracalny	tak
$11a_{238}$	2	5	$^{65}/_{53}$	65	−4	$1+8+6$	odwracalny	tak
$11a_{239}$	2	4	3	195	−2	$1+1+0-1-1$	odwracalny	tak
$11a_{240}$	4	3	3	61	−8	$1+9+18+11+2$	odwracalny	tak
$11a_{241}$	3	4	3	95	−6	$1+8+12+4$	odwracalny	tak
$11a_{242}$	3	4	$^{47}/_{9}$	47	−6	$1+8+11+3$	odwracalny	tak
$11a_{243}$	2	5	$^{69}/_{49}$	69	−4	$1+7+6$	odwracalny	tak
$11a_{244}$	3	4	3	147	−6	$1+9+13+5$	chiralny	tak
$11a_{245}$	3	4	3	75	−6	$1+7+9+3$	odwracalny	tak
$11a_{246}$	2	5	$^{41}/_{13}$	41	−4	$1+6+4$	odwracalny	tak
$11a_{247}$	1	6	$^{19}/_{17}$	19	−2	$1+5$	odwracalny	tak
$11a_{248}$	2	4	3	159	2	$1+0-2-2-1$	odwracalny	tak
$11a_{249}$	2	5	3	117	0	$1-1-1-2$	odwracalny	tak
$11a_{250}$	2	4	3	85	−4	$1-1+1+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{251}$	2	4	3	133	0	$1-1+0+2+1$	chiralny	tak
$11a_{252}$	2	4	3	131	−2	$1+1+0-2-1$	chiralny	tak
$11a_{253}$	2	4	3	133	0	$1-1+0+2+1$	chiralny	tak
$11a_{254}$	2	4	3	131	−2	$1+1+0-2-1$	chiralny	tak
$11a_{255}$	1	4	3	143	2	$1+0-1-2-1$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$11a_{256}$	1	5	3	133	0	$1-1+0-2$	chiralny	tak
$11a_{257}$	1	4	3	97	0	$1+0+2+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{258}$	2	5	3	75	-2	$1-1+3+2$	odwracalny	tak
$11a_{259}$	3	4	3	79	-6	$1+4+0-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{260}$	2	5	3	69	-4	$1+3-3-2$	odwracalny	tak
$11a_{261}$	2	4	3	129	4	$1+0+0+2+1$	chiralny	tak
$11a_{262}$	2	5	3	107	2	$1-1+1+2$	chiralny	tak
$11a_{263}$	4	4	4	81	-8	$1+8+15+10+2$	odwracalny	tak
$11a_{264}$	1	4	3	135	-2	$1+2+0-2-1$	chiralny	tak
$11a_{265}$	2	5	3	109	0	$1+1-1-2$	chiralny	tak
$11a_{266}$	1	4	3	209	0	$1+0+1+1+1$	odwracalny	tak
$11a_{267}$	1	4	3	191	2	$1+0+0-1-1$	chiralny	tak
$11a_{268}$	2	4	3	139	-2	$1-1-1-2-1$	chiralny	tak
$11a_{269}$	2	4	3	151	-2	$1-2-2-2-1$	chiralny	tak
$11a_{270}$	2	5	3	137	0	$1-2+0-2$	chiralny	tak
$11a_{271}$	2	5	3	171	-2	$1-1+1+3$	odwracalny	tak
$11a_{272}$	1	5	3	149	0	$1-1+1-2$	chiralny	tak
$11a_{273}$	2	5	3	159	2	$1+0+2+3$	chiralny	tak
$11a_{274}$	2	4	3	165	0	$1-1+2+2+1$	chiralny	tak
$11a_{275}$	2	5	3	129	-4	$1+4-3-3$	chiralny	tak
$11a_{276}$	2	5	3	161	-4	$1+4-1-3$	chiralny	tak
$11a_{277}$	2	4	3	135	-2	$1-2-1-2-1$	odwracalny	tak
$11a_{278}$	2	5	3	141	0	$1-3+0-2$	odwracalny	tak
$11a_{279}$	2	5	3	91	-2	$1-1+6+3$	odwracalny	tak
$11a_{280}$	1	6	3	105	0	$1-2+6$	odwracalny	tak
$11a_{281}$	2	4	3	155	-2	$1-1-2-2-1$	odwracalny	tak
$11a_{282}$	1	4	3	127	2	$1+0+0-2-1$	chiralny	tak
$11a_{283}$	1	5	3	147	2	$1+1+3+3$	chiralny	tak
$11a_{284}$	2	4	3	179	-2	$1+1+1-1-1$	chiralny	tak
$11a_{285}$	2	5	3	161	0	$1+0+2-2$	odwracalny	tak
$11a_{286}$	2	4	3	147	-2	$1+1-1-2-1$	chiralny	tak
$11a_{287}$	1	4	3	181	0	$1-1-1+1+1$	chiralny	tak
$11a_{288}$	2	4	3	205	0	$1+1+1+1+1$	odwracalny	tak
$11a_{289}$	1	4	3	145	0	$1+0+1+2+1$	chiralny	tak
$11a_{290}$	1	5	3	141	0	$1+1-3-3$	chiralny	tak
$11a_{291}$	3..4	4	3	99	-6	$1+9+16+5$	odwracalny	tak
$11a_{292}$	3	5	3	129	-4	$1+8+10$	odwracalny	tak
$11a_{293}$	2..3	4	3	81	4	$1+4+2+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{294}$	2	5	3	123	2	$1+3+1+2$	odwracalny	tak
$11a_{295}$	2	5	3	109	4	$1+5-4-3$	chiralny	tak
$11a_{296}$	2	6	3	111	2	$1+4-6$	chiralny	tak
$11a_{297}$	2	5	3	175	2	$1+0-3+2$	odwracalny	tak
$11a_{298}$	3..4	4	3	131	-6	$1+9+14+5$	chiralny	tak
$11a_{299}$	2..3	5	3	97	-4	$1+8+8$	chiralny	tak
$11a_{300}$	1	4	3	153	0	$1-2+1+2+1$	chiralny	tak
$11a_{301}$	2	4	3	199	2	$1+2+0-1-1$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$11a_{302}$	2	4	3	161	4	$1+0-2+1+1$	odwracalny	tak
$11a_{303}$	2	5	3	149	0	$1-1-3-3$	chiralny	tak
$11a_{304}$	2..3	5	3	117	-4	$1+3-4-3$	odwracalny	tak
$11a_{305}$	2	4	3	135	2	$1+2+0-2-1$	odwracalny	tak
$11a_{306}$	2	4	$^{105}/_{76}$	105	4	$1+2+3+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{307}$	1	5	$^{83}/_{18}$	83	2	$1+1+3+2$	odwracalny	tak
$11a_{308}$	3	4	$^{71}/_{15}$	71	-6	$1+6+1-3-1$	odwracalny	tak
$11a_{309}$	2	5	$^{93}/_{25}$	93	-4	$1+5-1-2$	odwracalny	tak
$11a_{310}$	2	5	$^{61}/_{47}$	61	-4	$1+5-3-2$	odwracalny	tak
$11a_{311}$	1	6	$^{79}/_{61}$	79	-2	$1+4-4$	odwracalny	tak
$11a_{312}$	2	5	3	119	2	$1+2+5+3$	odwracalny	tak
$11a_{313}$	2	6	3	77	0	$1+1+5$	odwracalny	tak
$11a_{314}$	2	4	3	171	-2	$1-1+1-1-1$	odwracalny	tak
$11a_{315}$	2	4	3	157	0	$1+1+2+2+1$	chiralny	tak
$11a_{316}$	2	4	3	121	0	$1+2+4+3+1$	chiralny	tak
$11a_{317}$	2	5	3	125	0	$1+1-4-3$	odwracalny	tak
$11a_{318}$	3	4	3	135	-6	$1+10+14+5$	odwracalny	tak
$11a_{319}$	3..4	4	3	119	-6	$1+10+15+5$	chiralny	tak
$11a_{320}$	2..3	5	3	109	-4	$1+9+9$	chiralny	tak
$11a_{321}$	2	5	3	121	4	$1+6-3-3$	odwracalny	tak
$11a_{322}$	2	5	3	151	2	$1+2-1+2$	chiralny	tak
$11a_{323}$	2	5	3	83	2	$1+1+3+2$	chiralny	tak
$11a_{324}$	2	6	3	99	2	$1+5-5$	odwracalny	tak
$11a_{325}$	2	6	3	95	2	$1+0-6$	odwracalny	tak
$11a_{326}$	1	4	3	169	0	$1+2+3+2+1$	chiralny	tak
$11a_{327}$	2	5	3	187	-2	$1+3+1+3$	odwracalny	tak
$11a_{328}$	2	5	3	149	-4	$1+3-2-3$	chiralny	tak
$11a_{329}$	2..3	5	3	145	-4	$1+8+11$	odwracalny	tak
$11a_{330}$	2	4	3	89	4	$1+2+2+3+1$	chiralny	tak
$11a_{331}$	2	5	3	115	2	$1+1+1+2$	chiralny	tak
$11a_{332}$	2	4	3	189	0	$1+1+0+1+1$	odwracalny	tak
$11a_{333}$	2	6	$^{65}/_{14}$	65	0	$1+0+4$	odwracalny	tak
$11a_{334}$	4	3	$^{49}/_{9}$	49	-8	$1+12+22+12+2$	odwracalny	tak
$11a_{335}$	3	4	$^{75}/_{17}$	75	-6	$1+11+14+4$	odwracalny	tak
$11a_{336}$	3..4	4	$^{59}/_{11}$	59	-6	$1+11+15+4$	odwracalny	tak
$11a_{337}$	3	5	$^{89}/_{63}$	89	-4	$1+10+8$	odwracalny	tak
$11a_{338}$	4	3	3	69	-8	$1+11+19+11+2$	odwracalny	tak
$11a_{339}$	3	4	$^{55}/_{13}$	55	-6	$1+10+11+3$	odwracalny	tak
$11a_{340}$	3..4	4	3	87	-6	$1+10+13+4$	odwracalny	tak
$11a_{341}$	3	5	$^{61}/_{19}$	61	-4	$1+9+6$	odwracalny	tak
$11a_{342}$	2	5	$^{29}/_{25}$	29	-4	$1+9+4$	odwracalny	tak
$11a_{343}$	2	6	$^{31}/_{27}$	31	-2	$1+8$	odwracalny	tak
$11a_{344}$	2	5	3	129	-4	$1+4-3-3$	chiralny	tak
$11a_{345}$	1	6	3	91	-2	$1+3-5$	chiralny	tak
$11a_{346}$	2..3	4	3	93	-4	$1+1+2+3+1$	odwracalny	tak
$11a_{347}$	2	5	3	111	-2	$1+0+1+2$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$11a_{348}$	2	4	3	145	-4	$1+0-3+1+1$	odwracalny	tak
$11a_{349}$	2	5	3	155	-2	$1-1-2+2$	odwracalny	tak
$11a_{350}$	2	4	3	185	0	$1-2-1+1+1$	odwracalny	tak
$11a_{351}$	1	4	3	165	0	$1-1-2+1+1$	odwracalny	tak
$11a_{352}$	2	5	3	135	-2	$1-2-1+2$	odwracalny	tak
$11a_{353}$	3..4	4	3	123	-6	$1+11+15+5$	odwracalny	tak
$11a_{354}$	2..4	5	3	105	-4	$1+10+9$	odwracalny	tak
$11a_{355}$	4	3	$^{45}/_{7}$	45	-8	$1+13+22+12+2$	odwracalny	tak
$11a_{356}$	3..4	4	$^{79}/_{55}$	79	-6	$1+12+14+4$	odwracalny	tak
$11a_{357}$	3..4	4	$^{91}/_{27}$	91	-6	$1+11+13+4$	odwracalny	tak
$11a_{358}$	3	4	$^{31}/_{5}$	31	-6	$1+12+13+3$	odwracalny	tak
$11a_{359}$	3	5	$^{53}/_{43}$	53	-4	$1+11+6$	odwracalny	tak
$11a_{360}$	3	5	$^{57}/_{47}$	57	-4	$1+10+6$	odwracalny	tak
$11a_{361}$	3..4	5	3	69	-4	$1+11+7$	odwracalny	tak
$11a_{362}$	2..3	6	3	39	-2	$1+10$	odwracalny	tak
$11a_{363}$	2..3	6	$^{35}/_{29}$	35	-2	$1+9$	odwracalny	tak
$11a_{364}$	4	3	$^{25}/_{3}$	25	-8	$1+14+25+13+2$	odwracalny	tak
$11a_{365}$	4	4	$^{51}/_{35}$	51	-6	$1+13+16+4$	odwracalny	tak
$11a_{366}$	3..4	5	3	81	-4	$1+12+8$	odwracalny	tak
$11a_{367}$	5	2	$^{11}/_{1}$	11	-10	$1+15+35+28+9+1$	odwracalny	tak
$11n_1$	1	5	3	27	2	$1+3-1$	odwracalny	nie
$11n_2$	2	5	3	57	-4	$1+2-4-2$	odwracalny	nie
$11n_3$	1..2	5	3	43	2	$1-1-3$	odwracalny	nie
$11n_4$	2	4	3	49	0	$1+0-1-1$	chiralny	nie
$11n_5$	2	4	3	71	-2	$1-2-1+1$	chiralny	nie
$11n_6$	2	5	3	17	0	$1+0-3-1$	chiralny	nie
$11n_7$	2	5	3	67	-2	$1+1+0+1$	chiralny	nie
$11n_8$	2	4	3	53	4	$1+3+0-1$	chiralny	nie
$11n_9$	3	4	3	5	-4	$1+3-3-5-1$	chiralny	nie
$11n_{10}$	2	4	3	65	4	$1+4+1-1$	chiralny	nie
$11n_{11}$	2	4	3	55	-2	$1+2+1+1$	chiralny	nie
$11n_{12}$	1	4	3	13	0	$1+1+1$	odwracalny	nie
$11n_{13}$	3	4	3	15	-6	$1+4-4-5-1$	odwracalny	nie
$11n_{14}$	2	4	3	45	4	$1+5+0-1$	odwracalny	nie
$11n_{15}$	2	4	3	35	-2	$1+1+2+1$	odwracalny	nie
$11n_{16}$	2	5	3	37	-4	$1+3-5-2$	odwracalny	nie
$11n_{17}$	1..2	5	3	47	2	$1+4-2$	odwracalny	nie
$11n_{18}$	1	5	3	33	0	$1+0+2$	odwracalny	nie
$11n_{19}$	2	4	3	5	4	$1-1-4-1$	odwracalny	nie
$11n_{20}$	1	5	3	23	2	$1-2-2$	odwracalny	nie
$11n_{21}$	1	4	3	49	0	$1+0-1-1$	chiralny	nie
$11n_{22}$	1	4	3	55	-2	$1+2+1+1$	chiralny	nie
$11n_{23}$	2..3	4	3	29	-4	$1+5+7+5+1$	chiralny	nie
$11n_{24}$	2	4	3	23	-2	$1+2+3+1$	chiralny	nie
$11n_{25}$	1	4	3	47	-2	$1+0+1+1$	chiralny	nie
$11n_{26}$	1	4	3	41	0	$1+2-1-1$	chiralny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$11n_{27}$	3	4	3	19	-6	$1+1-5-5-1$	chiralny	nie
$11n_{28}$	1	5	3	21	0	$1-1+1$	odwracalny	nie
$11n_{29}$	2	5	3	51	-2	$1+1-3$	odwracalny	nie
$11n_{30}$	2..3	5	3	33	-4	$1+0-6-2$	odwracalny	nie
$11n_{31}$	2	5	3	3	-2	$1+1-4-1$	chiralny	nie
$11n_{32}$	2	5	3	69	0	$1-1+0-1$	chiralny	nie
$11n_{33}$	2	5	3	51	-2	$1-3+0+1$	chiralny	nie
$11n_{34}$	1	4	3	1	0	1	chiralny	nie
$11n_{35}$	2	4	3	89	-4	$1+2-2-2$	chiralny	nie
$11n_{36}$	2	4	3	67	-2	$1+1-4-4-1$	chiralny	nie
$11n_{37}$	2	4	3	25	0	$1-2-3-1$	chiralny	nie
$11n_{38}$	1	4	3	3	-2	$1-3-1$	odwracalny	nie
$11n_{39}$	1	4	3	25	0	$1+2+2$	chiralny	nie
$11n_{40}$	2	4	3	79	-2	$1+4+4+2$	chiralny	nie
$11n_{41}$	2	4	3	53	-4	$1+3+4+4+1$	chiralny	nie
$11n_{42}$	1	4	3	1	0	1	chiralny	nie
$11n_{43}$	2	4	3	89	-4	$1+2-2-2$	chiralny	nie
$11n_{44}$	2	4	3	67	-2	$1+1-4-4-1$	chiralny	nie
$11n_{45}$	1	4	3	25	0	$1+2+2$	odwracalny	nie
$11n_{46}$	2	4	3	79	-2	$1+4+4+2$	chiralny	nie
$11n_{47}$	2	4	3	53	-4	$1+3+4+4+1$	chiralny	nie
$11n_{48}$	1	4	3	29	0	$1-3-3-1$	odwracalny	nie
$11n_{49}$	2	5	3	1	0	$1-4-1$	odwracalny	nie
$11n_{50}$	1	4	3	25	0	$1+2+2$	chiralny	nie
$11n_{51}$	1..2	4	3	29	0	$1+1-2-1$	odwracalny	nie
$11n_{52}$	1	4	3	59	-2	$1-1+0+1$	odwracalny	nie
$11n_{53}$	1	4	3	37	0	$1-1-2-1$	odwracalny	nie
$11n_{54}$	1..2	4	3	43	-2	$1+3+2+1$	odwracalny	nie
$11n_{55}$	1	4	3	61	0	$1+1+0-1$	odwracalny	nie
$11n_{56}$	1	4	3	35	-2	$1+1+2+1$	odwracalny	nie
$11n_{57}$	3	4	3	7	-6	$1+2-4-5-1$	odwracalny	nie
$11n_{58}$	2	4	3	35	2	$1+1+2+1$	odwracalny	nie
$11n_{59}$	2	4	3	53	-4	$1+3+0-1$	odwracalny	nie
$11n_{60}$	1..2	4	3	31	-2	$1+0-6-5-1$	odwracalny	nie
$11n_{61}$	2	4	3	17	-4	$1+4+6+5+1$	odwracalny	nie
$11n_{62}$	1	5	3	33	0	$1+0+2$	odwracalny	nie
$11n_{63}$	1	5	3	39	-2	$1+2-2$	odwracalny	nie
$11n_{64}$	2	5	3	21	-4	$1-1-7-2$	odwracalny	nie
$11n_{65}$	2..3	4	3	33	0	$1+4+3$	odwracalny	nie
$11n_{66}$	2	4	3	75	-2	$1-1-1+1$	odwracalny	nie
$11n_{67}$	2	5	3	9	0	$1-2$	chiralny	nie
$11n_{68}$	2	5	3	63	-2	$1+0-4$	chiralny	nie
$11n_{69}$	2	5	3	45	-4	$1+1-5-2$	chiralny	nie
$11n_{70}$	2	4	3	13	-4	$1-3-4-1$	odwracalny	nie
$11n_{71}$	2	4	4	63	-2	$1+4+5+2$	odwracalny	nie
$11n_{72}$	2	4	4	81	-4	$1+0-3-2$	odwracalny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$11n_{73}$	2	4	4	9	0	$1+2+1$	odwracalny	nie
$11n_{74}$	2	4	4	9	0	$1+2+1$	odwracalny	nie
$11n_{75}$	2	4	4	63	2	$1+4+5+2$	odwracalny	nie
$11n_{76}$	3	4	4	45	4	$1+5+8+5+1$	odwracalny	nie
$11n_{77}$	4	4	4	27	-6	$1+7+12+7+1$	odwracalny	nie
$11n_{78}$	2..3	4	4	45	-4	$1+5+8+5+1$	odwracalny	nie
$11n_{79}$	2	5	3	15	-2	$1-4-2$	odwracalny	nie
$11n_{80}$	2	5	3	15	2	$1+0-5-1$	chiralny	nie
$11n_{81}$	3	4	4	27	-6	$1-1-6-5-1$	odwracalny	nie
$11n_{82}$	1	4	3	19	-2	$1+1+3+1$	odwracalny	nie
$11n_{83}$	2	5	3	49	0	$1+0+3$	odwracalny	nie
$11n_{84}$	1	4	3	35	2	$1+1-2$	odwracalny	nie
$11n_{85}$	1	4	3	45	0	$1+1-1-1$	odwracalny	nie
$11n_{86}$	1	4	3	33	0	$1+0-2-1$	odwracalny	nie
$11n_{87}$	1	4	3	51	2	$1+1+1+1$	odwracalny	nie
$11n_{88}$	3	4	3	11	-6	$1+3-4-5-1$	odwracalny	nie
$11n_{89}$	2	4	3	61	4	$1+5+1-1$	odwracalny	nie
$11n_{90}$	2	5	3	41	-4	$1+2-5-2$	odwracalny	nie
$11n_{91}$	2	5	3	31	2	$1+4-1$	odwracalny	nie
$11n_{92}$	2	4	3	15	2	$1+0+3+1$	odwracalny	nie
$11n_{93}$	3	4	3	47	-6	$1+8+11+3$	chiralny	nie
$11n_{94}$	1..2	4	3	57	0	$1+2+0-1$	odwracalny	nie
$11n_{95}$	2	4	3	33	-4	$1+4-1-1$	odwracalny	nie
$11n_{96}$	1	4	3	7	-2	$1+2+4+1$	odwracalny	nie
$11n_{97}$	2	5	3	9	0	$1-2$	chiralny	nie
$11n_{98}$	2	4	3	69	0	$1+3+1-1$	odwracalny	nie
$11n_{99}$	2..3	4	3	39	2	$1-2-3$	odwracalny	nie
$11n_{100}$	1	5	3	45	0	$1-3+2$	chiralny	nie
$11n_{101}$	1	5	3	39	2	$1+2-2$	odwracalny	nie
$11n_{102}$	1..2	5	3	3	2	$1-3-1$	odwracalny	nie
$11n_{103}$	2	4	3	65	4	$1+4+1-1$	odwracalny	nie
$11n_{104}$	3	4	3	3	-6	$1+1-4-5-1$	odwracalny	nie
$11n_{105}$	2	4	3	69	-4	$1+3+1-1$	odwracalny	nie
$11n_{106}$	2	4	3	27	2	$1+3+3+1$	odwracalny	nie
$11n_{107}$	2	4	3	21	-4	$1+3+6+5+1$	odwracalny	nie
$11n_{108}$	2	4	3	73	4	$1+6+2-1$	chiralny	nie
$11n_{109}$	2	4	3	57	4	$1+6+1-1$	chiralny	nie
$11n_{110}$	1	4	3	41	0	$1-2-2-1$	chiralny	nie
$11n_{111}$	1	4	3	7	-2	$1-2-5-1$	odwracalny	nie
$11n_{112}$	1..2	4	3	55	-2	$1+2+1+1$	odwracalny	nie
$11n_{113}$	2	5	3	35	2	$1+5-1$	odwracalny	nie
$11n_{114}$	1	5	3	53	0	$1-1+3$	chiralny	nie
$11n_{115}$	1..2	5	3	77	0	$1-3+0-1$	odwracalny	nie
$11n_{116}$	1..2	5	3	1	0	$1-4-1$	chiralny	nie
$11n_{117}$	2	5	3	35	-2	$1-3-3$	odwracalny	nie
$11n_{118}$	2	4	3	21	-4	$1+3-2-1$	odwracalny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$11n_{119}$	1..2	4	3	69	0	$1-1+0-1$	odwracalny	nie
$11n_{120}$	1..2	4	3	47	-2	$1+0-3-4-1$	chiralny	nie
$11n_{121}$	2	4	3	45	4	$1+5+0-1$	odwracalny	nie
$11n_{122}$	1..2	4	3	27	2	$1-1-2$	chiralny	nie
$11n_{123}$	1	5	3	57	0	$1-2+3$	odwracalny	nie
$11n_{124}$	1	5	3	59	-2	$1-1+0+1$	chiralny	nie
$11n_{125}$	1	4	3	63	-2	$1+0+0+1$	odwracalny	nie
$11n_{126}$	3	4	3	27	-6	$1+7+12+3$	odwracalny	nie
$11n_{127}$	2	4	3	55	2	$1+2+1+1$	odwracalny	nie
$11n_{128}$	1..2	4	3	43	-2	$1-1+1+1$	chiralny	nie
$11n_{129}$	1..2	4	3	43	2	$1+3+2+1$	chiralny	nie
$11n_{130}$	1	4	3	53	0	$1-1-1-1$	chiralny	nie
$11n_{131}$	1	4	3	67	2	$1+1+0+1$	chiralny	nie
$11n_{132}$	2	4	3	25	0	$1+2+2$	chiralny	nie
$11n_{133}$	3	4	3	25	-4	$1+2+2+4+1$	odwracalny	nie
$11n_{134}$	1	4	3	47	2	$1+0-3$	chiralny	nie
$11n_{135}$	2	4	3	5	-4	$1-1-4-1$	odwracalny	nie
$11n_{136}$	3	4	3	63	-6	$1+8+10+3$	odwracalny	nie
$11n_{137}$	2..3	4	3	57	4	$1+6+1-1$	odwracalny	nie
$11n_{138}$	1..2	4	3	15	-2	$1-4-2$	odwracalny	nie
$11n_{139}$	1..2	5	3	9	0	$1-2$	chiralny	nie
$11n_{140}$	2	5	3	51	2	$1+5-2$	odwracalny	nie
$11n_{141}$	1..3	5	3	21	0	$1-5$	odwracalny	nie
$11n_{142}$	1..2	5	3	33	0	$1-4+1$	odwracalny	nie
$11n_{143}$	1	4	3	9	0	$1-2-4-1$	odwracalny	nie
$11n_{144}$	2	4	3	65	-4	$1+4+1-1$	odwracalny	nie
$11n_{145}$	1	4	3	9	0	$1+2+5+1$	odwracalny	nie
$11n_{146}$	2	4	3	63	-2	$1+4+1+1$	odwracalny	nie
$11n_{147}$	2	4	3	37	-4	$1+3+3+4+1$	chiralny	nie
$11n_{148}$	3	4	3	75	-2	$1+3+0-3-1$	odwracalny	nie
$11n_{149}$	2	4	3	33	-4	$1+0+2+4+1$	odwracalny	nie
$11n_{150}$	2	5	3	75	-2	$1-1+3+2$	odwracalny	nie
$11n_{151}$	1	4	3	23	-2	$1-2-2$	chiralny	nie
$11n_{152}$	1	4	3	23	-2	$1-2-2$	odwracalny	nie
$11n_{153}$	1	4	3	57	0	$1-2+3+4+1$	odwracalny	nie
$11n_{154}$	1	4	3	79	-2	$1+0-1+1$	chiralny	nie
$11n_{155}$	2	5	3	51	-2	$1-3+4+2$	odwracalny	nie
$11n_{156}$	1	4	3	77	0	$1+1+1-1$	odwracalny	nie
$11n_{157}$	2	4	3	65	0	$1+0+0-1$	odwracalny	nie
$11n_{158}$	2	4	3	45	-4	$1+1+3+4+1$	odwracalny	nie
$11n_{159}$	1	4	3	71	2	$1+2+0+1$	chiralny	nie
$11n_{160}$	1..2	4	3	67	-2	$1+1+0+1$	chiralny	nie
$11n_{161}$	1..2	5	3	63	-2	$1+0+4+2$	odwracalny	nie
$11n_{162}$	1..2	5	3	55	-2	$1+2-3$	odwracalny	nie
$11n_{163}$	2	4	3	91	-2	$1-1-2+1$	odwracalny	nie
$11n_{164}$	2	4	3	45	-4	$1+1-1-1$	odwracalny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$11n_{165}$	2	5	3	85	0	$1-1+1-1$	odwracalny	nie
$11n_{166}$	1..2	4	3	59	−2	$1-1-4-4-1$	chiralny	nie
$11n_{167}$	2	4	3	63	−2	$1+4+1+1$	odwracalny	nie
$11n_{168}$	2	5	3	75	−2	$1+3+0+1$	odwracalny	nie
$11n_{169}$	3..4	4	3	35	−6	$1+9+12+3$	odwracalny	nie
$11n_{170}$	2	5	3	63	2	$1+4-3$	odwracalny	nie
$11n_{171}$	2..3	5	3	65	−4	$1+8+6$	odwracalny	nie
$11n_{172}$	1..2	4	3	49	0	$1+0-1-1$	chiralny	nie
$11n_{173}$	2..3	4	3	45	−4	$1+5+4+4+1$	odwracalny	nie
$11n_{174}$	2	4	3	97	−4	$1+4-1-2$	chiralny	nie
$11n_{175}$	2	5	3	65	−4	$1+4-3-2$	odwracalny	nie
$11n_{176}$	1	4	3	63	2	$1+0+0+1$	chiralny	nie
$11n_{177}$	1..2	4	3	83	−2	$1+1-1-3-1$	chiralny	nie
$11n_{178}$	2	4	3	95	−2	$1+4+3+2$	odwracalny	nie
$11n_{179}$	1..2	4	3	77	0	$1+1+1-1$	odwracalny	nie
$11n_{180}$	3..4	4	3	55	−6	$1+10+11+3$	odwracalny	nie
$11n_{181}$	2..3	5	3	45	−4	$1+9+5$	odwracalny	nie
$11n_{182}$	1..2	4	3	93	0	$1-3+1+3+1$	odwracalny	nie
$11n_{183}$	3	4	3	21	−4	$1+7+7+1$	odwracalny	nie
$11n_{184}$	1	4	3	87	−2	$1+2+3+2$	chiralny	nie
$11n_{185}$	2	4	3	105	−4	$1+2-1-2$	odwracalny	nie
$12a_1$	1	5	3	213	0	$1-1+1+1+1$	chiralny	tak
$12a_2$	1	5	3	171	−2	$1-1+1-1-1$	chiralny	tak
$12a_3$	2	6	3	169	0	$1-2+2-2$	odwracalny	tak
$12a_4$	2	5	3	221	0	$1-3+1+1+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_5$	2	6	3	199	−2	$1-2-1+3$	chiralny	tak
$12a_6$	1	5	3	203	−2	$1-1-1-1-1$	chiralny	tak
$12a_7$	2	5	3	251	2	$1-1+0+0-1$	chiralny	tak
$12a_8$	1	5	3	181	0	$1-1-1+1+1$	chiralny	tak
$12a_9$	2	6	3	119	−2	$1-2+0+2$	odwracalny	tak
$12a_{10}$	2	6	3	207	−2	$1+0-1+3$	chiralny	tak
$12a_{11}$	2	5	3	165	4	$1+3-1+1+1$	chiralny	tak
$12a_{12}$	2	6	3	167	2	$1+2-2+2$	odwracalny	tak
$12a_{13}$	2	5	3	253	0	$1+1+0+0+1$	chiralny	tak
$12a_{14}$	2	5	3	251	2	$1-1+0+0-1$	chiralny	tak
$12a_{15}$	2	5	3	253	0	$1+1+0+0+1$	chiralny	tak
$12a_{16}$	2	5	3	201	0	$1-2+0+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{17}$	2	5	3	223	−2	$1+0-2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{18}$	2	5	3	151	−2	$1-2+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{19}$	1	5	3	191	2	$1+0+0-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{20}$	1	5	3	193	0	$1+0+0+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{21}$	2	5	3	197	−4	$1+3-3-4$	odwracalny	tak
$12a_{22}$	1	6	3	149	0	$1-1+1-2$	odwracalny	tak
$12a_{23}$	2	6	3	189	0	$1-3+3-2$	chiralny	tak
$12a_{24}$	2	5	3	161	−4	$1+0-2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{25}$	1	6	3	185	0	$1-2+3-2$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{26}$	2	5	3	145	4	$1+4-2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{27}$	1	6	3	187	2	$1+3-3+2$	odwracalny	tak
$12a_{28}$	1	6	3	175	-2	$1+0-3+2$	odwracalny	tak
$12a_{29}$	2	5	4	219	2	$1-1-2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{30}$	2	5	4	189	0	$1+1+0+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{31}$	1	6	3	139	-2	$1-1-1+2$	odwracalny	tak
$12a_{32}$	2	6	3	143	2	$1+0-1+2$	odwracalny	tak
$12a_{33}$	2	5	4	189	0	$1+1+0+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{34}$	3	4	3	115	-6	$1+5-2-7-2$	odwracalny	tak
$12a_{35}$	2..3	5	3	177	-4	$1+4-4-4$	odwracalny	tak
$12a_{36}$	3	5	4	159	-6	$1+4-1-6-2$	odwracalny	tak
$12a_{37}$	2..3	5	3	133	-4	$1+3-3-3$	odwracalny	tak
$12a_{38}$	2	6	$^{71}/_{33}$	71	-2	$1+2-4$	odwracalny	tak
$12a_{39}$	2	5	3	187	2	$1+3+1-1-1$	chiralny	tak
$12a_{40}$	1	5	3	211	-2	$1+1-1-1-1$	chiralny	tak
$12a_{41}$	2..3	4	3	185	4	$1+6+9+7+2$	chiralny	tak
$12a_{42}$	2	5	3	131	2	$1+5+5+3$	odwracalny	tak
$12a_{43}$	3	5	3	203	-6	$1+7+13+6$	chiralny	tak
$12a_{44}$	2..3	6	3	217	-4	$1+2-2-4$	odwracalny	tak
$12a_{45}$	2..3	5	3	179	2	$1+5+6+0-1$	chiralny	tak
$12a_{46}$	2	6	3	161	0	$1+4+3-2$	chiralny	tak
$12a_{47}$	2..3	6	3	193	-4	$1+4+1-3$	chiralny	tak
$12a_{48}$	2	5	3	261	0	$1-1+0+0+1$	chiralny	tak
$12a_{49}$	2..3	5	3	231	2	$1+6+7+5$	chiralny	tak
$12a_{50}$	2..3	5	3	151	2	$1+6+8+0-1$	chiralny	tak
$12a_{51}$	2	6	3	189	0	$1+5+5-2$	chiralny	tak
$12a_{52}$	4	4	3	109	-8	$1+9+21+15+3$	chiralny	tak
$12a_{53}$	3	5	3	175	-6	$1+8+15+6$	chiralny	tak
$12a_{54}$	2	6	3	169	0	$1+2-1-3$	chiralny	tak
$12a_{55}$	3	5	3	155	-6	$1+7+12+5$	chiralny	tak
$12a_{56}$	2	6	3	89	-4	$1+6+7$	odwracalny	tak
$12a_{57}$	2	6	3	177	0	$1+0-1-3$	chiralny	tak
$12a_{58}$	1	5	3	205	0	$1+1+1+1+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{59}$	2	5	3	259	-2	$1+1+0+0-1$	chiralny	tak
$12a_{60}$	2	5	3	261	0	$1-1+0+0+1$	chiralny	tak
$12a_{61}$	1	5	3	179	-2	$1+1+1-1-1$	chiralny	tak
$12a_{62}$	2	6	3	129	0	$1+0+0-2$	odwracalny	tak
$12a_{63}$	2	5	3	259	-2	$1+1+0+0-1$	chiralny	tak
$12a_{64}$	2..3	6	3	217	-4	$1+2-2-4$	chiralny	tak
$12a_{65}$	2..3	5	3	179	2	$1+5+6+0-1$	chiralny	tak
$12a_{66}$	2	5	3	237	0	$1+1+3+1+1$	chiralny	tak
$12a_{67}$	2	5	3	219	2	$1-1+2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{68}$	2	6	3	185	0	$1-2+3-2$	chiralny	tak
$12a_{69}$	2	5	3	239	2	$1+0+1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{70}$	2	5	3	233	4	$1+2-1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{71}$	2	5	3	207	-2	$1+0+3+0-1$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{72}$	2	6	3	197	0	$1-1+4-2$	chiralny	tak
$12a_{73}$	1	6	3	211	-2	$1+1-5+2$	chiralny	tak
$12a_{74}$	2	5	3	255	2	$1+0-4-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{75}$	2..3	5	3	205	-4	$1+5-6-5$	chiralny	tak
$12a_{76}$	2	6	3	143	-2	$1+4-8$	chiralny	tak
$12a_{77}$	2	5	3	225	0	$1+0+2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{78}$	2..3	4	3	149	4	$1+7+11+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{79}$	2	5	3	201	0	$1-2+0+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{80}$	1	5	3	173	0	$1+1-1+1+1$	chiralny	tak
$12a_{81}$	2	6	3	159	-2	$1+0-2+2$	odwracalny	tak
$12a_{82}$	3	5	3	191	-6	$1+8+14+6$	odwracalny	tak
$12a_{83}$	2	6	3	205	-4	$1+5+2-3$	odwracalny	tak
$12a_{84}$	2	5	3	199	2	$1+2+0-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{85}$	2..3	4	3	145	4	$1+8+11+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{86}$	2..3	5	3	171	2	$1+7+7+4$	odwracalny	tak
$12a_{87}$	2	5	3	175	2	$1+4+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{88}$	2	5	3	291	-2	$1+1-2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{89}$	2..3	5	3	167	2	$1+6+7+4$	chiralny	tak
$12a_{90}$	2	5	3	223	-2	$1+0-2-1-1$	chiralny	tak
$12a_{91}$	2	5	3	221	-4	$1+1-2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{92}$	2	5	3	191	2	$1+4+5+0-1$	chiralny	tak
$12a_{93}$	4	4	3	121	-8	$1+10+22+15+3$	chiralny	tak
$12a_{94}$	3..4	5	3	163	-6	$1+9+16+6$	chiralny	tak
$12a_{95}$	2	6	3	195	-2	$1+1+0+3$	odwracalny	tak
$12a_{96}$	3	5	3	115	-6	$1+9+15+5$	odwracalny	tak
$12a_{97}$	2..3	6	3	129	-4	$1+8+10$	odwracalny	tak
$12a_{98}$	2	5	3	191	-2	$1+0+0-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{99}$	2	5	3	217	0	$1+2+2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{100}$	2	6	3	225	0	$1+4+3-3$	chiralny	tak
$12a_{101}$	2	5	3	229	0	$1+3+3+1+1$	chiralny	tak
$12a_{102}$	3..4	5	3	239	-6	$1+8+15+7$	chiralny	tak
$12a_{103}$	2..3	6	3	219	-2	$1-1-2+3$	odwracalny	tak
$12a_{104}$	2..3	5	3	163	2	$1+5+7+4$	odwracalny	tak
$12a_{105}$	3	5	3	131	-6	$1+5+5-1-1$	chiralny	tak
$12a_{106}$	2	6	3	145	-4	$1+4+2-2$	odwracalny	tak
$12a_{107}$	3..4	5	3	239	-6	$1+8+15+7$	chiralny	tak
$12a_{108}$	2	5	3	235	-2	$1+3+2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{109}$	2	6	3	149	0	$1+3+2-2$	chiralny	tak
$12a_{110}$	2	6	3	181	-4	$1+3+0-3$	odwracalny	tak
$12a_{111}$	2	5	3	221	-4	$1+1-2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{112}$	2	5	3	167	2	$1+2+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{113}$	2	5	4	219	-2	$1-1-2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{114}$	2..3	6	4	201	-4	$1+2-3-4$	odwracalny	tak
$12a_{115}$	2	5	3	229	0	$1+3+3+1+1$	chiralny	tak
$12a_{116}$	2	5	4	171	2	$1+3+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{117}$	2..3	6	4	201	-4	$1+2-3-4$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{118}$	2	6	3	137	0	$1+2+1-2$	odwracalny	tak
$12a_{119}$	2	5	4	189	-4	$1+1+0+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{120}$	2	5	3	235	-2	$1+3+2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{121}$	1	6	3	141	0	$1+1+1-2$	odwracalny	tak
$12a_{122}$	2	5	4	171	2	$1+3+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{123}$	2	5	3	149	4	$1-1-3+1+1$	chiralny	tak
$12a_{124}$	2	6	3	151	2	$1-2-2+2$	odwracalny	tak
$12a_{125}$	2..3	7	3	181	0	$1-5+6-1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{126}$	2	5	3	229	0	$1-1-2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{127}$	2..3	6	3	159	-2	$1-4+1+3$	chiralny	tak
$12a_{128}$	2	7	3	101	0	$1-5+5$	odwracalny	tak
$12a_{129}$	2	5	3	155	-2	$1+3+3-1-1$	chiralny	tak
$12a_{130}$	2	6	3	153	0	$1+2+2-2$	odwracalny	tak
$12a_{131}$	2	5	3	227	2	$1+1+2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{132}$	2	5	3	229	0	$1-1-2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{133}$	2	5	3	227	2	$1+1+2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{134}$	2	5	3	221	0	$1+1-2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{135}$	2	6	3	175	2	$1+0-3+2$	chiralny	tak
$12a_{136}$	2	5	3	219	2	$1-1+2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{137}$	2	5	3	215	2	$1-2+2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{138}$	1	5	3	223	-2	$1+0+2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{139}$	2	5	3	257	0	$1+0+0+0+1$	chiralny	tak
$12a_{140}$	2	6	3	181	0	$1-1+3-2$	chiralny	tak
$12a_{141}$	2	5	3	161	0	$1+0-2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{142}$	2	5	3	185	-4	$1+2+0+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{143}$	4	4	3	85	-8	$1+11+24+16+3$	odwracalny	tak
$12a_{144}$	3..4	5	3	151	-6	$1+10+17+6$	odwracalny	tak
$12a_{145}$	3..4	5	3	179	-6	$1+9+15+6$	odwracalny	tak
$12a_{146}$	3..4	3	3	55	6	$1+10+19+17+7+1$	odwracalny	tak
$12a_{147}$	2..4	4	3	109	4	$1+9+13+9+2$	odwracalny	tak
$12a_{148}$	2..4	4	3	161	4	$1+8+12+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{149}$	2	5	3	199	-2	$1+2+0-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{150}$	2..4	5	3	159	2	$1+8+8+4$	odwracalny	tak
$12a_{151}$	1	6	3	147	-2	$1+1-1+2$	odwracalny	tak
$12a_{152}$	2..3	6	3	113	-4	$1+8+9$	odwracalny	tak
$12a_{153}$	2..3	5	3	107	2	$1+7+7+3$	odwracalny	tak
$12a_{154}$	2	6	3	241	-4	$1+4+0-4$	chiralny	tak
$12a_{155}$	2	6	3	171	-2	$1-1-3+2$	chiralny	tak
$12a_{156}$	2..4	6	3	141	-4	$1+9+11$	odwracalny	tak
$12a_{157}$	2	5	4	189	0	$1+1+0+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{158}$	3	5	3	119	-6	$1+6+6-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{159}$	2	6	3	157	-4	$1+5+3-2$	odwracalny	tak
$12a_{160}$	2..4	4	3	101	4	$1+7+12+9+2$	odwracalny	tak
$12a_{161}$	2..3	5	3	151	2	$1+6+8+4$	odwracalny	tak
$12a_{162}$	2	6	3	241	-4	$1+4+0-4$	chiralny	tak
$12a_{163}$	2	6	3	231	-2	$1+2+2+4$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{164}$	2	5	4	171	-2	$1+3+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{165}$	2	6	3	105	-4	$1+2-1-2$	odwracalny	tak
$12a_{166}$	2	5	4	171	-2	$1+3+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{167}$	2..4	4	4	153	4	$1+6+11+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{168}$	2..3	5	3	99	2	$1+5+7+3$	odwracalny	tak
$12a_{169}$	2	6	$^{49}/_{23}$	49	0	$1+4+4$	odwracalny	tak
$12a_{170}$	2	6	3	179	-2	$1-3+0+3$	odwracalny	tak
$12a_{171}$	2	6	3	197	0	$1-1+0-3$	odwracalny	tak
$12a_{172}$	2	5	3	129	4	$1+0-4+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{173}$	1	5	3	169	0	$1-2-2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{174}$	1	5	3	167	2	$1+2+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{175}$	2	6	3	183	2	$1-2-4+2$	odwracalny	tak
$12a_{176}$	2	6	3	131	2	$1-3-1+2$	odwracalny	tak
$12a_{177}$	2	6	3	171	2	$1-1-3+2$	chiralny	tak
$12a_{178}$	2..3	6	3	139	2	$1-5+2+3$	odwracalny	tak
$12a_{179}$	2	5	3	135	-2	$1+2+4-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{180}$	1	6	3	173	0	$1+1+3-2$	odwracalny	tak
$12a_{181}$	2..3	7	3	165	0	$1-5+5-1$	odwracalny	tak
$12a_{182}$	2	5	4	171	2	$1+3+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{183}$	2..3	7	3	121	0	$1-6+6$	odwracalny	tak
$12a_{184}$	1	5	3	241	0	$1+0-1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{185}$	2	5	3	247	-2	$1+2+1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{186}$	2..3	5	3	193	4	$1+4-3+0+1$	chiralny	tak
$12a_{187}$	2	6	3	203	2	$1+3-4+2$	chiralny	tak
$12a_{188}$	2	5	3	221	0	$1+1-2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{189}$	2	5	3	225	0	$1+0-2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{190}$	2	5	3	217	4	$1+2-2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{191}$	1	5	3	263	2	$1+2+0+0-1$	chiralny	tak
$12a_{192}$	2	6	3	179	2	$1+1-3+2$	chiralny	tak
$12a_{193}$	2..3	5	3	105	4	$1-2-6+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{194}$	2	6	3	163	2	$1-3-3+2$	odwracalny	tak
$12a_{195}$	2..3	5	4	141	4	$1-3-4+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{196}$	2..3	6	3	127	2	$1-4-1+2$	odwracalny	tak
$12a_{197}$	2	7	$^{69}/_{32}$	69	0	$1-5+3$	odwracalny	tak
$12a_{198}$	2	6	3	209	0	$1-4+4-2$	chiralny	tak
$12a_{199}$	2..3	5	3	245	-4	$1+3-4-5$	odwracalny	tak
$12a_{200}$	2	5	3	215	2	$1-2-2-1-1$	chiralny	tak
$12a_{201}$	2	6	3	157	0	$1-3+1-2$	chiralny	tak
$12a_{202}$	1	5	3	265	0	$1-2+0+0+1$	chiralny	tak
$12a_{203}$	2	5	3	183	2	$1-2+0-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{204}$	2	6	$^{173}/_{76}$	173	0	$1-3+2-2$	odwracalny	tak
$12a_{205}$	3	4	3	139	-6	$1+3-4-7-2$	odwracalny	tak
$12a_{206}$	2	5	$^{105}/_{47}$	105	-4	$1+2-5-3$	odwracalny	tak
$12a_{207}$	2	5	3	159	-2	$1+0+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{208}$	1	6	3	165	0	$1-1+2-2$	odwracalny	tak
$12a_{209}$	1	5	3	273	0	$1+0+1+0+1$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{210}$	2	5	3	189	-4	$1+1-4-4$	odwracalny	tak
$12a_{211}$	2..3	4	3	169	0	$1+6+12+8+2$	chiralny	tak
$12a_{212}$	2..3	5	3	147	-2	$1+5+8+4$	odwracalny	tak
$12a_{213}$	2	5	3	247	-2	$1-2+0+0-1$	chiralny	tak
$12a_{214}$	1	5	3	257	0	$1+0+0+0+1$	chiralny	tak
$12a_{215}$	2	5	3	195	2	$1+1+0-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{216}$	2	5	3	125	-4	$1+1-4+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{217}$	1	5	3	197	0	$1-1+0+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{218}$	2	6	3	175	-2	$1+0-3+2$	odwracalny	tak
$12a_{219}$	2	5	3	181	4	$1+3+0+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{220}$	1	5	3	187	-2	$1-1+0-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{221}$	2	6	$^{169}/_{66}$	169	0	$1-2+2-2$	odwracalny	tak
$12a_{222}$	2	5	3	281	0	$1-2+1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{223}$	2	6	3	189	0	$1+1+0-3$	odwracalny	tak
$12a_{224}$	2	5	3	231	-2	$1-2+1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{225}$	2	5	3	227	2	$1+1-2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{226}$	2	5	$^{181}/_{75}$	181	-4	$1+3-4-4$	odwracalny	tak
$12a_{227}$	2	5	3	245	-4	$1+3-4-5$	chiralny	tak
$12a_{228}$	2	5	3	223	2	$1+0-2-1-1$	chiralny	tak
$12a_{229}$	2	6	3	201	0	$1-2+4-2$	odwracalny	tak
$12a_{230}$	2	6	3	235	2	$1+3-2+3$	odwracalny	tak
$12a_{231}$	2..3	5	3	213	-4	$1+3-6-5$	odwracalny	tak
$12a_{232}$	2	5	3	185	-4	$1+2-4-4$	odwracalny	tak
$12a_{233}$	2	5	3	249	0	$1-2-1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{234}$	2	4	3	141	0	$1+5+10+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{235}$	2	5	3	175	-2	$1+4+6+4$	odwracalny	tak
$12a_{236}$	3	4	3	99	-6	$1+1-6-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{237}$	2	5	3	161	-4	$1+0-6-4$	odwracalny	tak
$12a_{238}$	2..3	5	3	149	-4	$1-1-7-4$	odwracalny	tak
$12a_{239}$	2	6	$^{87}/_{40}$	87	-2	$1-2-6$	odwracalny	tak
$12a_{240}$	2..3	4	3	173	4	$1+5+8+7+2$	odwracalny	tak
$12a_{241}$	2	5	$^{127}/_{57}$	127	2	$1+4+5+3$	odwracalny	tak
$12a_{242}$	2	5	3	191	-2	$1+0+0-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{243}$	2	6	$^{133}/_{60}$	133	0	$1-1+0-2$	odwracalny	tak
$12a_{244}$	2..3	5	3	243	2	$1+5+6+5$	odwracalny	tak
$12a_{245}$	2	5	3	225	0	$1+0+2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{246}$	2	5	3	153	-4	$1+2-2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{247}$	2	6	$^{163}/_{71}$	163	-2	$1+1-2+2$	odwracalny	tak
$12a_{248}$	2	6	3	145	0	$1+0+1-2$	odwracalny	tak
$12a_{249}$	2	6	3	151	2	$1+2-1+2$	odwracalny	tak
$12a_{250}$	2	5	3	157	-4	$1+1-2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{251}$	2	6	$^{159}/_{59}$	159	-2	$1+0-2+2$	odwracalny	tak
$12a_{252}$	3	4	3	131	-6	$1+5-3-7-2$	odwracalny	tak
$12a_{253}$	2	5	3	161	-4	$1+4-5-4$	odwracalny	tak
$12a_{254}$	2..3	5	$^{97}/_{23}$	97	-4	$1+4-5-3$	odwracalny	tak
$12a_{255}$	2	6	$^{107}/_{28}$	107	-2	$1+3-6$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{256}$	1	6	3	219	-2	$1-1-2+3$	chiralny	tak
$12a_{257}$	2	6	$^{191}/_{80}$	191	-2	$1+0-4+2$	odwracalny	tak
$12a_{258}$	2	5	3	169	0	$1-2-2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{259}$	2	6	$^{115}/_{52}$	115	-2	$1-3+0+2$	odwracalny	tak
$12a_{260}$	2	5	3	183	-2	$1-2+0-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{261}$	1	5	3	241	0	$1+0-1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{262}$	2	5	3	191	-2	$1+0+0-1-1$	chiralny	tak
$12a_{263}$	2	6	3	203	-2	$1-1-1+3$	odwracalny	tak
$12a_{264}$	2	5	3	295	-2	$1-2+1+1-1$	odwracalny	tak
$12a_{265}$	2	5	3	297	0	$1-2+2+0+1$	odwracalny	tak
$12a_{266}$	2	4	3	221	-4	$1+1+2+5+2$	chiralny	tak
$12a_{267}$	2	5	3	223	-2	$1+0+2+4$	chiralny	tak
$12a_{268}$	2	5	3	277	0	$1+3+2+0+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{269}$	2..3	5	3	153	-4	$1+2-6-4$	chiralny	tak
$12a_{270}$	2	6	3	99	-2	$1+1-6$	chiralny	tak
$12a_{271}$	2	5	3	185	0	$1+2+0+1+1$	chiralny	tak
$12a_{272}$	1	6	3	163	2	$1+1-2+2$	chiralny	tak
$12a_{273}$	2	5	3	205	0	$1+1-3-4$	-zwierciadlany	tak
$12a_{274}$	2	4	3	137	4	$1+6+10+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{275}$	2	5	3	179	2	$1+5+6+4$	odwracalny	tak
$12a_{276}$	4	4	3	157	-8	$1+9+20+14+3$	chiralny	tak
$12a_{277}$	3	5	3	143	-6	$1+8+13+5$	odwracalny	tak
$12a_{278}$	2	5	3	139	2	$1+3+4-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{279}$	2	6	3	169	0	$1+2+3-2$	odwracalny	tak
$12a_{280}$	1	5	3	195	-2	$1+1+0-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{281}$	2	5	3	213	-4	$1+3+2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{282}$	1	5	3	233	0	$1-2-2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{283}$	2	5	3	223	2	$1+0+2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{284}$	2	5	3	203	-2	$1-1+3+0-1$	chiralny	tak
$12a_{285}$	2	5	3	227	2	$1-3+1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{286}$	2	6	3	233	0	$1-2+2-3$	chiralny	tak
$12a_{287}$	1	5	3	243	2	$1+1+1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{288}$	2	5	3	255	2	$1+0+0+0-1$	chiralny	tak
$12a_{289}$	2..3	5	3	193	-4	$1+4-7-5$	chiralny	tak
$12a_{290}$	1	4	3	171	-2	$1-1-7-7-2$	chiralny	tak
$12a_{291}$	2	5	3	153	0	$1-2-7-4$	chiralny	tak
$12a_{292}$	2	5	3	219	2	$1+3+3+0-1$	chiralny	tak
$12a_{293}$	3	5	3	227	-6	$1+9+16+7$	chiralny	tak
$12a_{294}$	2..3	4	3	197	4	$1+7+10+7+2$	chiralny	tak
$12a_{295}$	3	5	3	207	-6	$1+8+13+6$	odwracalny	tak
$12a_{296}$	2	6	3	231	-2	$1-2-3+3$	chiralny	tak
$12a_{297}$	2..3	4	3	153	4	$1+6+11+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{298}$	2	5	3	171	2	$1+3+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{299}$	2	5	3	161	-4	$1+0-2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{300}$	1	6	$^{155}/_{68}$	155	-2	$1-1-2+2$	odwracalny	tak
$12a_{301}$	1	6	3	221	0	$1+1+2-3$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{302}$	2..3	5	$^{147}/_{61}$	147	2	$1+5+8+4$	odwracalny	tak
$12a_{303}$	1	6	$^{153}/_{64}$	153	0	$1+2+2-2$	odwracalny	tak
$12a_{304}$	2..3	5	3	137	4	$1-2-4+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{305}$	2	5	3	167	-2	$1+2+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{306}$	2	6	$^{147}/_{64}$	147	2	$1-3-2+2$	odwracalny	tak
$12a_{307}$	2	6	$^{157}/_{69}$	157	0	$1+1+2-2$	odwracalny	tak
$12a_{308}$	1	6	3	201	0	$1-2+4-2$	chiralny	tak
$12a_{309}$	1	6	3	245	0	$1-1+3-3$	chiralny	tak
$12a_{310}$	1	5	3	245	0	$1-1-1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{311}$	3	5	3	189	-4	$1+5-7-5$	odwracalny	tak
$12a_{312}$	2	6	3	159	-2	$1+4-9$	odwracalny	tak
$12a_{313}$	2	5	3	207	-2	$1+4+4+4$	chiralny	tak
$12a_{314}$	2	6	3	217	-4	$1+6+3-3$	chiralny	tak
$12a_{315}$	2..3	5	3	221	-4	$1+1-6-5$	chiralny	tak
$12a_{316}$	1	5	3	281	0	$1-2+1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{317}$	2	5	3	259	2	$1+5+5+5$	chiralny	tak
$12a_{318}$	2	5	3	199	2	$1+2+0-1-1$	chiralny	tak
$12a_{319}$	3..4	5	3	183	-6	$1+10+19+7$	chiralny	tak
$12a_{320}$	2..3	6	3	157	-4	$1+9+12$	chiralny	tak
$12a_{321}$	3	4	3	171	-6	$1+3-2-6-2$	chiralny	tak
$12a_{322}$	2	5	3	185	-4	$1+2-4-4$	chiralny	tak
$12a_{323}$	2	5	3	253	0	$1+1+0+0+1$	odwracalny	tak
$12a_{324}$	2	5	3	227	2	$1+1+2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{325}$	2	5	3	243	2	$1+1+1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{326}$	2	6	3	215	-2	$1+2-1+3$	chiralny	tak
$12a_{327}$	3	5	3	175	2	$1+4+6+4$	odwracalny	tak
$12a_{328}$	2	5	3	239	-2	$1+0+1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{329}$	2..3	5	3	141	-4	$1+1-7-4$	odwracalny	tak
$12a_{330}$	2	6	$^{95}/_{43}$	95	-2	$1+0-6$	odwracalny	tak
$12a_{331}$	2..3	5	3	177	4	$1+4+0+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{332}$	2	6	3	171	2	$1+3-2+2$	odwracalny	tak
$12a_{333}$	2	5	3	241	0	$1+0-1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{334}$	2	5	3	249	0	$1+2+0+0+1$	chiralny	tak
$12a_{335}$	2	5	3	271	-2	$1+4+4+1-1$	chiralny	tak
$12a_{336}$	2	5	3	213	-4	$1+3-2-4$	chiralny	tak
$12a_{337}$	2	6	3	259	-2	$1+1-4+3$	chiralny	tak
$12a_{338}$	2	6	3	187	-2	$1-1-4+2$	chiralny	tak
$12a_{339}$	2	6	3	155	-2	$1+3-9$	chiralny	tak
$12a_{340}$	1	6	3	247	-2	$1+2-3+3$	chiralny	tak
$12a_{341}$	2	5	3	229	0	$1-1-2+0+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{342}$	2	5	3	237	0	$1-3-2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{343}$	2	6	3	199	-2	$1-2-1+3$	chiralny	tak
$12a_{344}$	3	5	3	139	-6	$1+7+13+5$	chiralny	tak
$12a_{345}$	2	6	3	105	-4	$1+6+8$	odwracalny	tak
$12a_{346}$	1	4	3	213	0	$1-1+1+5+2$	odwracalny	tak
$12a_{347}$	2	5	3	231	-2	$1-2+1+4$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{348}$	2	6	3	225	0	$1-4+5-2$	chiralny	tak
$12a_{349}$	2	5	3	205	4	$1+5-2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{350}$	2..3	5	3	229	-4	$1+3-5-5$	chiralny	tak
$12a_{351}$	2	5	3	221	0	$1+1+2+1+1$	chiralny	tak
$12a_{352}$	2	5	3	259	2	$1+1+0+0-1$	chiralny	tak
$12a_{353}$	2	5	3	187	-2	$1+3+5+4$	odwracalny	tak
$12a_{354}$	2	5	3	259	-2	$1+1+4+5$	odwracalny	tak
$12a_{355}$	3	5	3	127	-6	$1+8+14+5$	chiralny	tak
$12a_{356}$	2	6	3	101	-4	$1+7+8$	odwracalny	tak
$12a_{357}$	2	6	3	173	0	$1+1-1-3$	odwracalny	tak
$12a_{358}$	1	5	3	255	-2	$1+0+0+0-1$	odwracalny	tak
$12a_{359}$	1	5	3	305	0	$1+0-1-1+1$	odwracalny	tak
$12a_{360}$	1	6	3	225	0	$1+0+2-3$	chiralny	tak
$12a_{361}$	2	5	3	329	0	$1-2+0-1+1$	chiralny	tak
$12a_{362}$	2	5	3	261	4	$1+3-3-1+1$	chiralny	tak
$12a_{363}$	2	5	3	229	4	$1+3-1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{364}$	2	5	3	283	2	$1+3-1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{365}$	2	4	3	131	2	$1+1-4-7-2$	chiralny	tak
$12a_{366}$	2	5	3	193	0	$1+0-4-4$	chiralny	tak
$12a_{367}$	4	4	3	133	-8	$1+11+23+15+3$	odwracalny	tak
$12a_{368}$	3..4	5	3	167	-6	$1+10+16+6$	odwracalny	tak
$12a_{369}$	3	3	3	67	6	$1+9+18+17+7+1$	odwracalny	tak
$12a_{370}$	2..3	4	3	113	4	$1+8+13+9+2$	odwracalny	tak
$12a_{371}$	2..3	4	3	97	4	$1+8+12+9+2$	odwracalny	tak
$12a_{372}$	2..3	5	3	155	2	$1+7+8+4$	odwracalny	tak
$12a_{373}$	3	5	3	147	-6	$1+5+4-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{374}$	1	5	3	189	0	$1+1+0+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{375}$	2..3	4	3	117	4	$1+7+13+9+2$	odwracalny	tak
$12a_{376}$	2..3	5	3	135	2	$1+6+9+4$	odwracalny	tak
$12a_{377}$	2	5	3	225	0	$1+0-2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{378}$	2	6	$^{127}/_{45}$	127	-2	$1+0+0+2$	odwracalny	tak
$12a_{379}$	2..3	5	$^{71}/_{17}$	71	2	$1+6+9+3$	odwracalny	tak
$12a_{380}$	2..3	6	$^{77}/_{20}$	77	0	$1+5+6$	odwracalny	tak
$12a_{381}$	2..3	6	3	155	-2	$1-5+1+3$	odwracalny	tak
$12a_{382}$	2..3	5	3	133	4	$1-1-4+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{383}$	2	5	3	163	2	$1+1+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{384}$	2	6	$^{151}/_{62}$	151	2	$1-2-2+2$	odwracalny	tak
$12a_{385}$	2	6	$^{161}/_{66}$	161	0	$1+0+2-2$	odwracalny	tak
$12a_{386}$	3	5	3	189	4	$1+5-3+0+1$	odwracalny	tak
$12a_{387}$	2	5	3	245	0	$1-1-1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{388}$	1	5	3	245	0	$1-1-1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{389}$	2	5	3	315	2	$1+3+1+1-1$	odwracalny	tak
$12a_{390}$	2	4	3	243	-2	$1+1-3-5-2$	chiralny	tak
$12a_{391}$	3..4	5	3	187	-6	$1+11+19+7$	odwracalny	tak
$12a_{392}$	2..4	6	3	153	-4	$1+10+12$	odwracalny	tak
$12a_{393}$	2	5	3	261	-4	$1+3-3-5$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{394}$	2	4	3	181	4	$1+7+9+7+2$	chiralny	tak
$12a_{395}$	2	5	3	183	2	$1+6+6+4$	chiralny	tak
$12a_{396}$	2	5	3	189	0	$1+1+0+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{397}$	2	6	3	205	-4	$1+5+2-3$	odwracalny	tak
$12a_{398}$	2	5	3	185	-4	$1+2+0+1+1$	chiralny	tak
$12a_{399}$	2	5	3	211	2	$1+5+8+5$	chiralny	tak
$12a_{400}$	2	6	3	203	-2	$1+3+0+3$	odwracalny	tak
$12a_{401}$	2	6	3	159	-2	$1+0-2+2$	odwracalny	tak
$12a_{402}$	2	5	3	271	-2	$1+0-1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{403}$	2	6	3	209	0	$1+0+1-3$	chiralny	tak
$12a_{404}$	2	6	3	159	2	$1-4+1+3$	chiralny	tak
$12a_{405}$	2	6	3	191	-2	$1-4-1+3$	chiralny	tak
$12a_{406}$	2	6	$^{179}/_{74}$	179	-2	$1-3-4+2$	odwracalny	tak
$12a_{407}$	1	6	3	251	2	$1+3-3+3$	chiralny	tak
$12a_{408}$	2	5	3	285	-4	$1+5-1-5$	odwracalny	tak
$12a_{409}$	3	4	3	147	-6	$1+5+0-6-2$	chiralny	tak
$12a_{410}$	2	5	3	209	-4	$1+4-2-4$	chiralny	tak
$12a_{411}$	2	4	3	153	4	$1+6+7+7+2$	chiralny	tak
$12a_{412}$	2	5	3	211	2	$1+5+4+4$	chiralny	tak
$12a_{413}$	2	5	3	279	-2	$1+2-1+0-1$	odwracalny	tak
$12a_{414}$	2..3	6	3	147	-2	$1+1-9$	odwracalny	tak
$12a_{415}$	1	5	3	249	0	$1-2-1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{416}$	2	5	3	207	-2	$1+0+3+0-1$	chiralny	tak
$12a_{417}$	2	5	3	251	2	$1-1+0+0-1$	chiralny	tak
$12a_{418}$	2	5	3	247	2	$1+2+1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{419}$	2	5	3	279	-2	$1-2+2+1-1$	chiralny	tak
$12a_{420}$	3	5	3	111	-6	$1+8+15+5$	odwracalny	tak
$12a_{421}$	2..3	6	3	133	-4	$1+7+10$	odwracalny	tak
$12a_{422}$	2..4	4	3	69	4	$1+7+14+10+2$	odwracalny	tak
$12a_{423}$	2..3	5	3	119	2	$1+6+10+4$	odwracalny	tak
$12a_{424}$	2..3	5	3	131	2	$1+5+9+4$	odwracalny	tak
$12a_{425}$	2	6	$^{81}/_{37}$	81	0	$1+4+6$	odwracalny	tak
$12a_{426}$	1	5	3	273	0	$1+0+1+0+1$	odwracalny	tak
$12a_{427}$	2	5	3	225	0	$1+0-2+0+1$	+zwierciadlany	tak
$12a_{428}$	2	4	3	165	0	$1+3+7+7+2$	chiralny	tak
$12a_{429}$	2	5	3	183	-2	$1+2+5+4$	chiralny	tak
$12a_{430}$	2	4	3	221	4	$1+5+7+6+2$	odwracalny	tak
$12a_{431}$	3..4	5	3	275	-6	$1+9+17+8$	chiralny	tak
$12a_{432}$	3	5	3	211	-6	$1+9+17+7$	chiralny	tak
$12a_{433}$	3	6	3	189	-4	$1+5+1-3$	odwracalny	tak
$12a_{434}$	2..3	5	3	195	2	$1+5+5+0-1$	chiralny	tak
$12a_{435}$	2	5	3	225	0	$1+0-2+0+1$	całkowicie	tak
$12a_{436}$	2..3	5	3	143	2	$1+4+4-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{437}$	2	6	$^{149}/_{65}$	149	0	$1+3+2-2$	odwracalny	tak
$12a_{438}$	2	5	3	209	0	$1+0-3+0+1$	odwracalny	tak
$12a_{439}$	1	5	3	321	0	$1+0+0-1+1$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{440}$	2	4	3	149	-4	$1+3+6+7+2$	chiralny	tak
$12a_{441}$	2	5	3	199	-2	$1+2+4+4$	chiralny	tak
$12a_{442}$	3	5	3	103	-6	$1+10+16+5$	odwracalny	tak
$12a_{443}$	2..3	6	3	125	-4	$1+9+10$	odwracalny	tak
$12a_{444}$	2	6	3	129	-4	$1+4+1-2$	odwracalny	tak
$12a_{445}$	2	5	3	171	2	$1+3+2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{446}$	2	5	3	231	-2	$1+2+2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{447}$	2	6	$^{121}/_{43}$	121	0	$1+2+0-2$	odwracalny	tak
$12a_{448}$	2	7	3	105	0	$1-6+5$	odwracalny	tak
$12a_{449}$	2..3	6	3	187	2	$1-1-4+2$	odwracalny	tak
$12a_{450}$	2	6	3	207	2	$1+4-4+2$	odwracalny	tak
$12a_{451}$	1	5	3	243	-2	$1+1+1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{452}$	2	5	3	253	0	$1+1+0+0+1$	chiralny	tak
$12a_{453}$	2	5	3	149	0	$1-5-4+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{454}$	2..3	6	$^{103}/_{27}$	103	-2	$1-6+0+2$	odwracalny	tak
$12a_{455}$	1	5	3	239	2	$1+0+1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{456}$	2	5	3	225	0	$1-4-3+0+1$	chiralny	tak
$12a_{457}$	2	5	3	271	2	$1+0-1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{458}$	2	5	3	289	0	$1+0-2-1+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{459}$	2	6	3	243	2	$1+1-3+3$	chiralny	tak
$12a_{460}$	2	6	3	221	0	$1-3+5-2$	odwracalny	tak
$12a_{461}$	2..3	5	3	233	-4	$1+2-5-5$	chiralny	tak
$12a_{462}$	2..3	5	3	157	0	$1-3-3+1+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{463}$	2	6	3	111	-2	$1-4+0+2$	odwracalny	tak
$12a_{464}$	2	5	3	225	0	$1+0+2+1+1$	chiralny	tak
$12a_{465}$	2	5	3	241	0	$1-4-2+0+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{466}$	2	5	3	209	4	$1+4-2+0+1$	odwracalny	tak
$12a_{467}$	1	5	3	271	2	$1+0-1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{468}$	2	5	3	191	2	$1+4+5+0-1$	chiralny	tak
$12a_{469}$	2	5	3	217	0	$1+2+2+1+1$	chiralny	tak
$12a_{470}$	1	5	3	247	-2	$1+2+1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{471}$	2	7	$^{85}/_{38}$	85	0	$1-5+4$	całkowicie	tak
$12a_{472}$	2	6	3	237	4	$1+5+4-3$	odwracalny	tak
$12a_{473}$	2	5	3	289	0	$1+0+2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{474}$	2	5	3	287	2	$1+0+2+1-1$	odwracalny	tak
$12a_{475}$	2	5	3	255	-2	$1+0+0+0-1$	chiralny	tak
$12a_{476}$	2	5	3	161	4	$1+0-2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{477}$	2..3	7	$^{169}/_{70}$	169	0	$1-6+5-1$	całkowicie	tak
$12a_{478}$	2	5	3	215	2	$1+2+3+0-1$	odwracalny	tak
$12a_{479}$	2	5	3	257	0	$1+0+0+0+1$	chiralny	tak
$12a_{480}$	2	5	3	287	-2	$1+0-2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{481}$	2..3	6	3	119	2	$1-6-1+2$	odwracalny	tak
$12a_{482}$	2..3	7	$^{93}/_{22}$	93	0	$1-7+4$	odwracalny	tak
$12a_{483}$	1	5	3	335	2	$1+0-1+1-1$	odwracalny	tak
$12a_{484}$	2	5	3	289	0	$1+0-2-1+1$	chiralny	tak
$12a_{485}$	2	5	3	255	2	$1+0+0+0-1$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{486}$	2	5	3	273	0	$1+0-3-1+1$	odwracalny	tak
$12a_{487}$	2	5	3	263	2	$1-2-1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{488}$	2	5	3	175	-2	$1-4+0-1-1$	chiralny	tak
$12a_{489}$	2	6	3	211	-2	$1-3-2+3$	chiralny	tak
$12a_{490}$	3	5	3	207	-6	$1+8+17+7$	odwracalny	tak
$12a_{491}$	2	6	3	177	0	$1-4+2-2$	odwracalny	tak
$12a_{492}$	2	6	3	197	0	$1-5+3-2$	chiralny	tak
$12a_{493}$	2..3	5	3	171	-2	$1-5+0-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{494}$	2..3	6	3	201	0	$1-6+3-2$	odwracalny	tak
$12a_{495}$	2	4	3	245	-4	$1+3+4+5+2$	odwracalny	tak
$12a_{496}$	2..3	4	3	267	-2	$1+3+0-4-2$	odwracalny	tak
$12a_{497}$	1	5	$^{209}/_{81}$	209	0	$1+0+1+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{498}$	1	5	$^{207}/_{76}$	207	-2	$1+0-1-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{499}$	2	5	$^{233}/_{89}$	233	0	$1+2+3+1+1$	całkowicie	tak
$12a_{500}$	2	5	$^{167}/_{60}$	167	-2	$1-2+1-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{501}$	2	5	$^{199}/_{55}$	199	-2	$1-2-1-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{502}$	3	4	$^{91}/_{37}$	91	-6	$1+3-5-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{503}$	2	5	3	135	-2	$1-2+3-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{504}$	2	5	3	153	-4	$1+2-6-4$	chiralny	tak
$12a_{505}$	2	5	3	183	2	$1+2+1-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{506}$	2	5	$^{185}/_{68}$	185	0	$1-2-1+1+1$	całkowicie	tak
$12a_{507}$	3	4	3	115	-6	$1+1-7-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{508}$	2..3	5	$^{129}/_{56}$	129	-4	$1+0-8-4$	odwracalny	tak
$12a_{509}$	1	4	3	219	-2	$1-1-6-6-2$	chiralny	tak
$12a_{510}$	2	5	$^{193}/_{81}$	193	0	$1+0-4-4$	całkowicie	tak
$12a_{511}$	2	4	$^{125}/_{51}$	125	4	$1+5+9+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{512}$	2	5	$^{151}/_{64}$	151	2	$1+2+3-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{513}$	2	5	3	175	2	$1+4+6+4$	chiralny	tak
$12a_{514}$	2	5	$^{187}/_{79}$	187	2	$1+3+5+4$	odwracalny	tak
$12a_{515}$	2	5	3	177	0	$1+0-1+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{516}$	2	5	3	215	-2	$1+2-1-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{517}$	2	5	$^{145}/_{52}$	145	-4	$1+0-3+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{518}$	2	6	$^{157}/_{34}$	157	0	$1-3+1-2$	odwracalny	tak
$12a_{519}$	3	4	$^{111}/_{25}$	111	-6	$1+4-6-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{520}$	2	5	$^{133}/_{36}$	133	-4	$1+3-7-4$	odwracalny	tak
$12a_{521}$	2	5	$^{113}/_{48}$	113	-4	$1+0-5+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{522}$	2	5	$^{173}/_{73}$	173	-4	$1+1-5-4$	odwracalny	tak
$12a_{523}$	2	4	3	213	0	$1+3+6+6+2$	chiralny	tak
$12a_{524}$	1	6	3	171	-2	$1-1-3+2$	chiralny	tak
$12a_{525}$	2	6	3	141	0	$1+1+1-2$	odwracalny	tak
$12a_{526}$	2	4	3	211	-2	$1+1-5-6-2$	chiralny	tak
$12a_{527}$	2	4	3	197	-4	$1+3+5+6+2$	chiralny	tak
$12a_{528}$	2	5	$^{183}/_{67}$	183	2	$1+2+1-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{529}$	2	6	3	189	0	$1-3+3-2$	chiralny	tak
$12a_{530}$	2	6	3	217	0	$1-2+1-3$	odwracalny	tak
$12a_{531}$	2	4	3	151	-2	$1-2-10-8-2$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{532}$	2	5	$^{125}/_{33}$	125	0	$1-3-9-4$	odwracalny	tak
$12a_{533}$	2..3	4	$^{137}/_{31}$	137	4	$1+6+10+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{534}$	2	5	$^{163}/_{44}$	163	2	$1+5+7+4$	odwracalny	tak
$12a_{535}$	1	5	$^{175}/_{47}$	175	2	$1+0+1-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{536}$	2	5	$^{137}/_{29}$	137	-4	$1+2-3+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{537}$	1	6	$^{179}/_{50}$	179	-2	$1+1-3+2$	odwracalny	tak
$12a_{538}$	3	4	$^{83}/_{13}$	83	-6	$1+5-4-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{539}$	2	5	$^{145}/_{44}$	145	-4	$1+4-6-4$	odwracalny	tak
$12a_{540}$	2	5	$^{165}/_{49}$	165	-4	$1+3-5-4$	odwracalny	tak
$12a_{541}$	2	5	$^{153}/_{41}$	153	-4	$1-2-3+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{542}$	2	6	3	123	-2	$1+3-7$	odwracalny	tak
$12a_{543}$	2	6	3	239	-2	$1+0-3+3$	chiralny	tak
$12a_{544}$	2..3	4	3	157	0	$1+5+11+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{545}$	2..3	5	$^{143}/_{63}$	143	-2	$1+4+8+4$	odwracalny	tak
$12a_{546}$	2	6	3	231	-2	$1-2-3+3$	odwracalny	tak
$12a_{547}$	2	5	3	233	-4	$1+2-5-5$	chiralny	tak
$12a_{548}$	2	5	3	109	-4	$1-3-10-4$	odwracalny	tak
$12a_{549}$	2	6	$^{111}/_{26}$	111	-2	$1-4-8$	odwracalny	tak
$12a_{550}$	2	6	$^{149}/_{34}$	149	0	$1-1+1-2$	odwracalny	tak
$12a_{551}$	1	6	$^{103}/_{18}$	103	-2	$1+2-6$	odwracalny	tak
$12a_{552}$	2	6	$^{131}/_{30}$	131	-2	$1-3-1+2$	odwracalny	tak
$12a_{553}$	2..3	4	3	205	-4	$1+5+6+6+2$	odwracalny	tak
$12a_{554}$	2..3	6	4	189	0	$1-3+3-2$	odwracalny	tak
$12a_{555}$	2	6	3	193	0	$1+0+0-3$	chiralny	tak
$12a_{556}$	2..3	5	3	145	-4	$1+0-7-4$	chiralny	tak
$12a_{557}$	2	6	3	107	-2	$1-1-7$	chiralny	tak
$12a_{558}$	2	4	3	233	-4	$1+2+3+5+2$	chiralny	tak
$12a_{559}$	1	5	3	211	-2	$1+1+3+4$	chiralny	tak
$12a_{560}$	1	6	3	173	0	$1+1+3-2$	chiralny	tak
$12a_{561}$	3	5	3	225	-4	$1+4+3+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{562}$	2	6	3	171	-2	$1-1-3+2$	chiralny	tak
$12a_{563}$	3	5	3	117	-4	$1+3-8-4$	chiralny	tak
$12a_{564}$	2	6	3	135	-2	$1+2-8$	chiralny	tak
$12a_{565}$	2	5	3	193	4	$1+4+1+1+1$	chiralny	tak
$12a_{566}$	2	6	3	155	2	$1+3-1+2$	chiralny	tak
$12a_{567}$	2	4	3	249	0	$1-2-1+4+2$	odwracalny	tak
$12a_{568}$	2..3	5	3	157	-4	$1+1-6-4$	chiralny	tak
$12a_{569}$	3	5	3	153	4	$1+6-1+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{570}$	2	6	3	195	2	$1+5-3+2$	odwracalny	tak
$12a_{571}$	1	4	3	279	-2	$1+2-1-4-2$	chiralny	tak
$12a_{572}$	2	4	3	175	-2	$1+0-7-7-2$	chiralny	tak
$12a_{573}$	2	4	3	143	2	$1+0-5-7-2$	chiralny	tak
$12a_{574}$	4	4	3	117	-8	$1+11+22+15+3$	odwracalny	tak
$12a_{575}$	3	5	3	183	-6	$1+10+15+6$	odwracalny	tak
$12a_{576}$	3	3	3	63	6	$1+8+18+17+7+1$	odwracalny	tak
$12a_{577}$	2	4	3	117	4	$1+7+13+9+2$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{578}$	2	4	3	153	4	$1+6+11+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{579}$	1	5	$^{177}/_{49}$	177	0	$1+0-1+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{580}$	2..3	4	$^{69}/_{11}$	69	4	$1+7+14+10+2$	odwracalny	tak
$12a_{581}$	2	5	$^{119}/_{36}$	119	2	$1+6+10+4$	odwracalny	tak
$12a_{582}$	2	5	$^{131}/_{39}$	131	2	$1+5+9+4$	odwracalny	tak
$12a_{583}$	2	5	$^{161}/_{45}$	161	0	$1-4-3+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{584}$	2	5	$^{143}/_{31}$	143	-2	$1+0+3-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{585}$	1	6	$^{181}/_{50}$	181	0	$1-1+3-2$	odwracalny	tak
$12a_{586}$	3..4	5	3	203	-6	$1+11+18+7$	chiralny	tak
$12a_{587}$	3	4	3	175	-6	$1+4-2-6-2$	chiralny	tak
$12a_{588}$	1	4	3	255	-2	$1+0-4-5-2$	chiralny	tak
$12a_{589}$	2	4	3	185	4	$1+6+9+7+2$	chiralny	tak
$12a_{590}$	3	4	3	151	-6	$1+2-5-7-2$	chiralny	tak
$12a_{591}$	2	5	3	109	-4	$1+1-5-3$	odwracalny	tak
$12a_{592}$	2..3	5	3	217	-4	$1+2-6-5$	chiralny	tak
$12a_{593}$	2	5	3	181	0	$1-1-5-4$	chiralny	tak
$12a_{594}$	2	5	3	99	2	$1+5+7+3$	odwracalny	tak
$12a_{595}$	2	6	$^{139}/_{30}$	139	-2	$1-1-1+2$	odwracalny	tak
$12a_{596}$	2	6	$^{81}/_{14}$	81	0	$1+4+6$	odwracalny	tak
$12a_{597}$	2..3	6	$^{123}/_{26}$	123	2	$1-5-1+2$	odwracalny	tak
$12a_{598}$	2	4	3	211	-2	$1+1-5-6-2$	chiralny	tak
$12a_{599}$	2	4	3	209	4	$1+4+6+6+2$	chiralny	tak
$12a_{600}$	2..3	5	$^{109}/_{25}$	109	-4	$1+1-9-4$	odwracalny	tak
$12a_{601}$	2	6	$^{127}/_{34}$	127	-2	$1+0-8$	odwracalny	tak
$12a_{602}$	2	4	3	229	0	$1-1+2+5+2$	chiralny	tak
$12a_{603}$	2	5	3	215	-2	$1-2+2+4$	chiralny	tak
$12a_{604}$	1	6	3	223	-2	$1+0-2+3$	chiralny	tak
$12a_{605}$	2	4	3	155	2	$1-1-6-7-2$	chiralny	tak
$12a_{606}$	1	5	3	169	0	$1-2-6-4$	chiralny	tak
$12a_{607}$	2	4	3	173	4	$1+5+8+7+2$	chiralny	tak
$12a_{608}$	1	5	3	191	2	$1+4+5+4$	chiralny	tak
$12a_{609}$	2	5	3	223	2	$1+4+7+5$	chiralny	tak
$12a_{610}$	2..3	6	3	137	-4	$1+10+11$	chiralny	tak
$12a_{611}$	2	5	3	237	-4	$1+5+0-4$	chiralny	tak
$12a_{612}$	2	5	3	145	-4	$1+0-7-4$	chiralny	tak
$12a_{613}$	2	5	3	155	2	$1+3+3+3$	chiralny	tak
$12a_{614}$	1	6	3	215	-2	$1-2-2+3$	chiralny	tak
$12a_{615}$	3	5	3	243	-6	$1+9+15+7$	odwracalny	tak
$12a_{616}$	2..3	4	3	265	-4	$1+6+6+5+2$	odwracalny	tak
$12a_{617}$	2	4	3	177	0	$1+4+8+7+2$	chiralny	tak
$12a_{618}$	2	4	3	257	-4	$1+4+5+5+2$	chiralny	tak
$12a_{619}$	2	6	3	95	-2	$1+0-6$	chiralny	tak
$12a_{620}$	2	4	3	269	-4	$1+1+1+4+2$	chiralny	tak
$12a_{621}$	2	5	3	175	2	$1+4+6+0-1$	chiralny	tak
$12a_{622}$	2	6	3	197	0	$1+3+5-2$	chiralny	tak
$12a_{623}$	2	5	3	189	-4	$1+1-4-4$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{624}$	2	5	3	179	2	$1+5+6+4$	chiralny	tak
$12a_{625}$	2	6	3	209	0	$1+0+1-3$	odwracalny	tak
$12a_{626}$	1	4	3	291	-2	$1+1-2-4-2$	chiralny	tak
$12a_{627}$	2	5	3	229	0	$1-1-2+0+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{628}$	2	5	3	195	-2	$1+1+0+3$	odwracalny	tak
$12a_{629}$	2	5	3	297	0	$1+2+3+0+1$	odwracalny	tak
$12a_{630}$	2	5	3	239	-2	$1+0+1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{631}$	1	5	3	225	0	$1+0-2-4$	chiralny	tak
$12a_{632}$	2	5	3	149	0	$1-1-7-4$	chiralny	tak
$12a_{633}$	2	5	3	219	-2	$1+3+3+4$	chiralny	tak
$12a_{634}$	2..3	5	3	135	2	$1+6+9+4$	odwracalny	tak
$12a_{635}$	1	6	3	201	0	$1+2+1-3$	chiralny	tak
$12a_{636}$	2..3	6	3	93	0	$1+5+7$	odwracalny	tak
$12a_{637}$	1	5	3	231	2	$1+2+2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{638}$	2	5	3	181	-4	$1+3-4-4$	chiralny	tak
$12a_{639}$	2..3	4	3	199	-2	$1+2-4-6-2$	chiralny	tak
$12a_{640}$	2	5	3	125	0	$1+1-4-3$	chiralny	tak
$12a_{641}$	2..3	4	3	73	4	$1+6+14+10+2$	odwracalny	tak
$12a_{642}$	2	5	3	115	2	$1+5+10+4$	odwracalny	tak
$12a_{643}$	2..3	5	$^{99}/_{23}$	99	2	$1+5+11+4$	odwracalny	tak
$12a_{644}$	2	6	$^{113}/_{30}$	113	0	$1+4+8$	odwracalny	tak
$12a_{645}$	2	4	3	259	-2	$1+1-4-5-2$	chiralny	tak
$12a_{646}$	1	4	3	169	0	$1+2+7+7+2$	chiralny	tak
$12a_{647}$	4	4	3	153	-8	$1+10+20+14+3$	odwracalny	tak
$12a_{648}$	3	5	3	147	-6	$1+9+13+5$	odwracalny	tak
$12a_{649}$	2..3	5	$^{127}/_{27}$	127	2	$1+4+5-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{650}$	2	6	$^{165}/_{46}$	165	0	$1+3+3-2$	odwracalny	tak
$12a_{651}$	2..3	5	$^{97}/_{17}$	97	-4	$1-4-7+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{652}$	2	6	$^{155}/_{46}$	155	-2	$1-5-3+2$	odwracalny	tak
$12a_{653}$	2..3	6	3	145	-4	$1+8+11$	odwracalny	tak
$12a_{654}$	2	5	3	165	-4	$1+3-1-3$	chiralny	tak
$12a_{655}$	2	5	3	159	2	$1+4+7+4$	chiralny	tak
$12a_{656}$	1	5	3	235	2	$1+3+2+4$	odwracalny	tak
$12a_{657}$	2	4	3	181	0	$1+3+8+7+2$	chiralny	tak
$12a_{658}$	2	5	3	167	-2	$1+2+6+4$	chiralny	tak
$12a_{659}$	3..4	5	3	263	-6	$1+10+18+8$	chiralny	tak
$12a_{660}$	3	4	3	163	-6	$1+5-1-6-2$	chiralny	tak
$12a_{661}$	2..3	5	3	193	-4	$1+4-3-4$	chiralny	tak
$12a_{662}$	1	5	3	241	0	$1+0-1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{663}$	2	6	3	175	-2	$1+0+1+3$	odwracalny	tak
$12a_{664}$	3	5	3	169	-4	$1-2-6+0+1$	odwracalny	tak
$12a_{665}$	2..3	6	3	195	-2	$1-3-5+2$	odwracalny	tak
$12a_{666}$	2	6	3	207	-2	$1-4-2+3$	chiralny	tak
$12a_{667}$	2..4	4	3	121	0	$1+6+13+9+2$	chiralny	tak
$12a_{668}$	2..3	4	3	189	0	$1+5+9+7+2$	chiralny	tak
$12a_{669}$	2..3	5	3	67	2	$1+5+9+3$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{670}$	1	4	3	237	0	$1+1+3+5+2$	chiralny	tak
$12a_{671}$	2	4	3	173	-4	$1+5+8+7+2$	chiralny	tak
$12a_{672}$	2	4	3	243	-2	$1+1-3-5-2$	chiralny	tak
$12a_{673}$	2	5	3	203	-2	$1-1+3+0-1$	odwracalny	tak
$12a_{674}$	2	5	3	221	0	$1-3-3+0+1$	chiralny	tak
$12a_{675}$	2	4	3	209	-4	$1+4+6+6+2$	chiralny	tak
$12a_{676}$	2	5	3	139	-2	$1+3+4+3$	chiralny	tak
$12a_{677}$	2	5	3	175	-2	$1+4+6+4$	chiralny	tak
$12a_{678}$	2	5	3	179	-2	$1+1+5+4$	chiralny	tak
$12a_{679}$	2	6	3	81	-4	$1+8+7$	odwracalny	tak
$12a_{680}$	2..3	4	3	199	-2	$1+2-4-6-2$	chiralny	tak
$12a_{681}$	2..3	5	3	145	-4	$1-4-4+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{682}$	2	6	$^{107}/_{29}$	107	-2	$1-5+0+2$	odwracalny	tak
$12a_{683}$	3	5	3	117	-4	$1-5-6+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{684}$	2..3	6	$^{135}/_{41}$	135	-2	$1-6-2+2$	odwracalny	tak
$12a_{685}$	2	5	3	201	-4	$1+2-3-4$	chiralny	tak
$12a_{686}$	2..3	5	3	209	-4	$1+0-7-5$	odwracalny	tak
$12a_{687}$	2..3	6	3	223	-2	$1-4-3+3$	chiralny	tak
$12a_{688}$	2	4	3	209	-4	$1+4+6+6+2$	chiralny	tak
$12a_{689}$	2..3	6	3	123	-2	$1-5-1+2$	odwracalny	tak
$12a_{690}$	2	7	$^{89}/_{20}$	89	0	$1-6+4$	odwracalny	tak
$12a_{691}$	2	7	$^{77}/_{12}$	77	0	$1-7+3$	odwracalny	tak
$12a_{692}$	2..4	4	4	153	4	$1+6+11+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{693}$	2..3	5	4	141	4	$1-3-4+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{694}$	3	5	4	159	-6	$1+4-1-6-2$	odwracalny	tak
$12a_{695}$	1	5	3	275	-2	$1+1-1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{696}$	1	5	3	277	0	$1-1+1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{697}$	1	5	3	301	0	$1+1-1-1+1$	chiralny	tak
$12a_{698}$	2	5	3	251	2	$1-1+0+0-1$	chiralny	tak
$12a_{699}$	2	5	3	261	0	$1-1+0+0+1$	chiralny	tak
$12a_{700}$	2	5	3	253	0	$1+1+4+1+1$	chiralny	tak
$12a_{701}$	2	4	3	225	4	$1+4+7+6+2$	chiralny	tak
$12a_{702}$	2..3	5	3	165	4	$1-1-2+1+1$	chiralny	tak
$12a_{703}$	2	5	3	291	2	$1+1+2+1-1$	chiralny	tak
$12a_{704}$	2	5	3	203	2	$1+3+4+0-1$	chiralny	tak
$12a_{705}$	2	5	3	309	0	$1-1-1-1+1$	odwracalny	tak
$12a_{706}$	2..3	5	3	213	0	$1+3+2+1+1$	odwracalny	tak
$12a_{707}$	2	5	3	269	0	$1+1+1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{708}$	2	5	3	195	-2	$1+1+0-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{709}$	2	5	3	259	2	$1+1+0+0-1$	chiralny	tak
$12a_{710}$	2	5	3	299	2	$1-1+1+1-1$	chiralny	tak
$12a_{711}$	2	5	3	243	2	$1+1+1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{712}$	2	5	3	315	2	$1-1+0+1-1$	odwracalny	tak
$12a_{713}$	2	4	$^{139}/_{39}$	139	-2	$1-1-9-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{714}$	2	4	$^{107}/_{19}$	107	2	$1-1-7-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{715}$	1	5	$^{169}/_{50}$	169	0	$1-2-6-4$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{716}$	3	3	$^{43}/_{5}$	43	6	$1+7+15+16+7+1$	odwracalny	tak
$12a_{717}$	2	4	$^{89}/_{28}$	89	4	$1+6+11+9+2$	odwracalny	tak
$12a_{718}$	2	4	$^{141}/_{41}$	141	4	$1+5+10+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{719}$	2	5	3	147	2	$1+5+8+4$	odwracalny	tak
$12a_{720}$	2	4	$^{113}/_{21}$	113	4	$1+4+8+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{721}$	1	5	$^{171}/_{50}$	171	2	$1+3+6+4$	odwracalny	tak
$12a_{722}$	4	3	$^{29}/_{3}$	29	-8	$1+5-5-14-7-1$	odwracalny	tak
$12a_{723}$	3	4	$^{63}/_{20}$	63	-6	$1+4-7-9-2$	odwracalny	tak
$12a_{724}$	3	4	$^{107}/_{31}$	107	-6	$1+3-6-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{725}$	3	5	3	117	-4	$1+3-8-4$	odwracalny	tak
$12a_{726}$	3	4	$^{103}/_{19}$	103	-6	$1+2-6-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{727}$	2	5	$^{157}/_{46}$	157	-4	$1+1-6-4$	odwracalny	tak
$12a_{728}$	2	4	$^{133}/_{29}$	133	0	$1+3+9+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{729}$	1	5	$^{167}/_{46}$	167	-2	$1+2+6+4$	odwracalny	tak
$12a_{730}$	2..3	5	3	153	-4	$1+2-6-4$	chiralny	tak
$12a_{731}$	2	5	$^{105}/_{22}$	105	-4	$1-2-10-4$	odwracalny	tak
$12a_{732}$	1	5	$^{95}/_{18}$	95	2	$1+4+7+3$	odwracalny	tak
$12a_{733}$	2	5	$^{73}/_{14}$	73	-4	$1+2-7-3$	odwracalny	tak
$12a_{734}$	2	4	3	223	-2	$1+0-6-6-2$	chiralny	tak
$12a_{735}$	2	6	3	99	-2	$1+1-6$	chiralny	tak
$12a_{736}$	1	5	$^{141}/_{43}$	141	0	$1-3-8-4$	odwracalny	tak
$12a_{737}$	2	4	3	165	4	$1+3+7+7+2$	odwracalny	tak
$12a_{738}$	2	5	$^{119}/_{37}$	119	2	$1+2+5+3$	odwracalny	tak
$12a_{739}$	3	4	3	147	-6	$1+1-5-7-2$	odwracalny	tak
$12a_{740}$	2	5	$^{113}/_{35}$	113	-4	$1+0-5-3$	odwracalny	tak
$12a_{741}$	2..3	5	3	237	-4	$1+1-5-5$	odwracalny	tak
$12a_{742}$	2	4	3	135	2	$1-2-9-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{743}$	2	6	$^{79}/_{12}$	79	-2	$1-4-6$	odwracalny	tak
$12a_{744}$	1	6	$^{61}/_{8}$	61	0	$1+1+4$	odwracalny	tak
$12a_{745}$	1	6	$^{59}/_{8}$	59	-2	$1-1-4$	odwracalny	tak
$12a_{746}$	2	4	3	217	0	$1+2+6+6+2$	odwracalny	tak
$12a_{747}$	2	5	3	211	2	$1+1+3+0-1$	chiralny	tak
$12a_{748}$	2	5	3	137	0	$1-2-8-4$	chiralny	tak
$12a_{749}$	2	5	3	143	2	$1+4+8+4$	chiralny	tak
$12a_{750}$	2..3	6	4	135	-2	$1+2-8$	odwracalny	tak
$12a_{751}$	1	6	3	161	0	$1+0+2-2$	chiralny	tak
$12a_{752}$	2	6	3	115	-2	$1-3-8$	chiralny	tak
$12a_{753}$	2	6	3	85	0	$1+3+6$	chiralny	tak
$12a_{754}$	2	5	3	263	-2	$1+2+4+1-1$	chiralny	tak
$12a_{755}$	2	4	3	271	-2	$1+0-5-5-2$	chiralny	tak
$12a_{756}$	2	5	3	187	2	$1+3+5+0-1$	chiralny	tak
$12a_{757}$	2	4	3	163	-2	$1+1-6-7-2$	odwracalny	tak
$12a_{758}$	2	5	$^{113}/_{31}$	113	0	$1+0-5-3$	odwracalny	tak
$12a_{759}$	2	4	$^{61}/_{9}$	61	4	$1+5+13+10+2$	odwracalny	tak
$12a_{760}$	2	5	$^{111}/_{34}$	111	2	$1+4+10+4$	odwracalny	tak
$12a_{761}$	1	5	$^{139}/_{41}$	139	2	$1+3+8+4$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{762}$	3..4	4	$^{51}/_{7}$	51	-6	$1+1-11-10-2$	odwracalny	tak
$12a_{763}$	2..3	5	$^{97}/_{30}$	97	-4	$1+0-10-4$	odwracalny	tak
$12a_{764}$	2..3	5	$^{133}/_{39}$	133	-4	$1-1-8-4$	odwracalny	tak
$12a_{765}$	1	5	3	277	0	$1-1-3-1+1$	chiralny	tak
$12a_{766}$	1	5	3	213	0	$1-1-3+0+1$	chiralny	tak
$12a_{767}$	2..3	6	3	123	-2	$1-1-8$	odwracalny	tak
$12a_{768}$	2	5	3	183	2	$1+2+5+0-1$	chiralny	tak
$12a_{769}$	2	6	3	189	0	$1+1+4-2$	chiralny	tak
$12a_{770}$	1	6	3	199	-2	$1-2-5+2$	chiralny	tak
$12a_{771}$	2	5	3	219	2	$1+3+7+5$	odwracalny	tak
$12a_{772}$	2	5	3	129	-4	$1+0-8-4$	odwracalny	tak
$12a_{773}$	1	6	$^{91}/_{20}$	91	-2	$1-1-6$	odwracalny	tak
$12a_{774}$	1	6	$^{89}/_{16}$	89	0	$1+2+6$	odwracalny	tak
$12a_{775}$	2	6	$^{87}/_{16}$	87	-2	$1-2-6$	odwracalny	tak
$12a_{776}$	2	5	3	215	-2	$1+2+3+0-1$	chiralny	tak
$12a_{777}$	2	5	3	177	-4	$1+0-5+0+1$	chiralny	tak
$12a_{778}$	2	5	3	265	0	$1-2-4-1+1$	chiralny	tak
$12a_{779}$	2	6	3	185	0	$1+2+4-2$	chiralny	tak
$12a_{780}$	3	5	3	225	-4	$1+0-6-5$	odwracalny	tak
$12a_{781}$	1	6	3	157	0	$1+1+2-2$	chiralny	tak
$12a_{782}$	2	6	3	151	-2	$1-2-2+2$	chiralny	tak
$12a_{783}$	2	6	3	187	-2	$1-1-4+2$	chiralny	tak
$12a_{784}$	2..3	4	3	193	0	$1+4+9+7+2$	chiralny	tak
$12a_{785}$	2	5	3	285	-4	$1+1-2-1+1$	odwracalny	tak
$12a_{786}$	2	6	3	169	0	$1+2+3-2$	chiralny	tak
$12a_{787}$	2	6	3	117	0	$1+3+8$	odwracalny	tak
$12a_{788}$	2	5	3	299	-2	$1-1-3+0-1$	odwracalny	tak
$12a_{789}$	2..3	4	3	109	0	$1+5+12+9+2$	odwracalny	tak
$12a_{790}$	2	5	3	143	-2	$1+4+8+4$	odwracalny	tak
$12a_{791}$	2..3	5	$^{63}/_{13}$	63	2	$1+4+9+3$	odwracalny	tak
$12a_{792}$	2	6	$^{85}/_{24}$	85	0	$1+3+6$	odwracalny	tak
$12a_{793}$	1	5	3	285	0	$1+1-2-1+1$	odwracalny	tak
$12a_{794}$	3..4	4	3	91	-6	$1-1-10-9-2$	odwracalny	tak
$12a_{795}$	2..3	5	3	137	-4	$1-2-8-4$	odwracalny	tak
$12a_{796}$	2..3	5	$^{57}/_{11}$	57	-4	$1-2-9-3$	odwracalny	tak
$12a_{797}$	2	6	$^{83}/_{24}$	83	-2	$1-3-6$	odwracalny	tak
$12a_{798}$	2..3	5	3	213	-4	$1-1-7-5$	chiralny	tak
$12a_{799}$	1	6	3	175	-2	$1+0-3+2$	odwracalny	tak
$12a_{800}$	2..3	5	3	93	-4	$1-3-7-3$	odwracalny	tak
$12a_{801}$	3..4	4	4	135	-6	$1-2-9-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{802}$	2	6	$^{47}/_{15}$	47	-2	$1-4-4$	odwracalny	tak
$12a_{803}$	1	7	$^{21}/_{2}$	21	0	$1-5$	odwracalny	tak
$12a_{804}$	2	5	3	249	-4	$1+2+0+4+2$	chiralny	tak
$12a_{805}$	2	3	3	129	4	$1+4+1-6-5-1$	odwracalny	tak
$12a_{806}$	2	4	3	219	2	$1+3-1-5-2$	odwracalny	tak
$12a_{807}$	1	4	3	231	2	$1+2-2-5-2$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{808}$	2	5	3	141	0	$1+1-3-3$	odwracalny	tak
$12a_{809}$	2	4	3	201	-4	$1+2+1+5+2$	odwracalny	tak
$12a_{810}$	2	5	3	243	-2	$1+1+1+4$	odwracalny	tak
$12a_{811}$	4	4	3	145	-8	$1+8+19+14+3$	odwracalny	tak
$12a_{812}$	2..3	5	3	201	-4	$1+2-7-5$	chiralny	tak
$12a_{813}$	4	4	3	125	-8	$1+9+22+15+3$	chiralny	tak
$12a_{814}$	3..4	5	3	159	-6	$1+8+16+6$	chiralny	tak
$12a_{815}$	2..4	3	3	95	2	$1+8+20+18+7+1$	chiralny	tak
$12a_{816}$	2..4	4	3	149	0	$1+7+15+9+2$	chiralny	tak
$12a_{817}$	4	4	3	145	-8	$1+8+19+14+3$	chiralny	tak
$12a_{818}$	2	5	3	195	-2	$1-3-1-1-1$	chiralny	tak
$12a_{819}$	2	3	3	169	0	$1+2-1-7-5-1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{820}$	2	4	3	179	-2	$1+1-3-6-2$	chiralny	tak
$12a_{821}$	1	5	3	193	0	$1+0-4-4$	-zwierciadlany	tak
$12a_{822}$	3	4	3	119	-6	$1+2-7-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{823}$	2	5	3	141	-4	$1+1-7-4$	odwracalny	tak
$12a_{824}$	2..3	3	3	107	2	$1+7+19+18+7+1$	chiralny	tak
$12a_{825}$	2..3	4	3	137	0	$1+6+14+9+2$	chiralny	tak
$12a_{826}$	2..3	4	3	89	0	$1+6+15+10+2$	odwracalny	tak
$12a_{827}$	2..3	5	3	99	-2	$1+5+11+4$	odwracalny	tak
$12a_{828}$	3..4	5	3	195	-6	$1+9+18+7$	chiralny	tak
$12a_{829}$	3	5	3	191	-6	$1+4+1-5-2$	chiralny	tak
$12a_{830}$	2	4	3	205	0	$1+5+10+7+2$	chiralny	tak
$12a_{831}$	2	4	3	205	0	$1+5+10+7+2$	chiralny	tak
$12a_{832}$	3	5	3	191	-6	$1+4+1-5-2$	chiralny	tak
$12a_{833}$	2	4	3	151	-2	$1+2-5-7-2$	chiralny	tak
$12a_{834}$	2	5	3	173	0	$1+1-5-4$	chiralny	tak
$12a_{835}$	2..3	3	3	71	2	$1+6+17+17+7+1$	odwracalny	tak
$12a_{836}$	2	4	3	125	0	$1+5+13+9+2$	odwracalny	tak
$12a_{837}$	2	4	3	145	0	$1+4+10+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{838}$	4	3	3	41	-8	$1+2-9-15-7-1$	odwracalny	tak
$12a_{839}$	3	4	3	83	-6	$1+1-9-9-2$	odwracalny	tak
$12a_{840}$	3	4	3	127	-6	$1+0-8-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{841}$	2..3	5	3	129	-4	$1+0-8-4$	odwracalny	tak
$12a_{842}$	2	5	3	91	-2	$1+3+7+3$	odwracalny	tak
$12a_{843}$	2	5	3	85	-4	$1-1-7-3$	odwracalny	tak
$12a_{844}$	2	5	3	203	-2	$1+3+4+0-1$	chiralny	tak
$12a_{845}$	2..3	5	3	111	-2	$1+4+10+4$	odwracalny	tak
$12a_{846}$	2	5	3	203	-2	$1+3+4+0-1$	chiralny	tak
$12a_{847}$	2	5	3	189	-4	$1+1-4+0+1$	chiralny	tak
$12a_{848}$	2	4	3	161	4	$1+4+7+7+2$	chiralny	tak
$12a_{849}$	1	5	3	187	2	$1+3+5+4$	chiralny	tak
$12a_{850}$	2	3	3	89	-4	$1+2-6-11-6-1$	chiralny	tak
$12a_{851}$	1	4	3	163	-2	$1+1-6-7-2$	chiralny	tak
$12a_{852}$	2	4	3	207	-2	$1+0-5-6-2$	chiralny	tak
$12a_{853}$	2	5	3	177	0	$1+0-5-4$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{854}$	2	5	3	133	0	$1-1-4-3$	chiralny	tak
$12a_{855}$	2	4	3	171	-2	$1-1-3-6-2$	chiralny	tak
$12a_{856}$	2	5	3	233	0	$1-2-2-4$	chiralny	tak
$12a_{857}$	1	4	3	239	2	$1+0-3-5-2$	chiralny	tak
$12a_{858}$	1	5	3	165	0	$1-1-2-3$	chiralny	tak
$12a_{859}$	3	3	3	79	6	$1+4+8+11+6+1$	chiralny	tak
$12a_{860}$	2	4	3	149	4	$1+3+6+7+2$	chiralny	tak
$12a_{861}$	2	4	3	201	4	$1+2+5+6+2$	chiralny	tak
$12a_{862}$	2..3	5	3	183	2	$1+2+5+4$	chiralny	tak
$12a_{863}$	2	5	3	131	2	$1+1+4+3$	chiralny	tak
$12a_{864}$	1	3	3	159	2	$1+0+2+7+5+1$	chiralny	tak
$12a_{865}$	1	4	3	229	0	$1-1+2+5+2$	chiralny	tak
$12a_{866}$	2	4	3	295	2	$1+2-2-4-2$	chiralny	tak
$12a_{867}$	2	5	3	313	0	$1+2+0-1+1$	chiralny	tak
$12a_{868}$	2	5	3	377	0	$1-2-1-2+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{869}$	2..3	3	3	161	4	$1+4-1-7-5-1$	odwracalny	tak
$12a_{870}$	2	4	3	187	2	$1+3-3-6-2$	chiralny	tak
$12a_{871}$	2	4	3	223	2	$1+4-1-5-2$	chiralny	tak
$12a_{872}$	2	5	3	197	0	$1+3-3-4$	chiralny	tak
$12a_{873}$	2	5	3	189	0	$1+1-8-5$	odwracalny	tak
$12a_{874}$	2	4	3	283	2	$1+3-1-4-2$	chiralny	tak
$12a_{875}$	1	5	3	307	-2	$1+1+1+5$	chiralny	tak
$12a_{876}$	4	4	3	105	-8	$1+10+25+16+3$	odwracalny	tak
$12a_{877}$	3..4	5	3	131	-6	$1+9+18+6$	odwracalny	tak
$12a_{878}$	2..3	3	3	75	2	$1+7+17+17+7+1$	odwracalny	tak
$12a_{879}$	2..3	4	3	121	0	$1+6+13+9+2$	odwracalny	tak
$12a_{880}$	2..3	6	3	161	-4	$1+8+12$	odwracalny	tak
$12a_{881}$	2..3	4	3	89	4	$1+6+11+9+2$	odwracalny	tak
$12a_{882}$	2	5	3	147	2	$1+5+8+4$	odwracalny	tak
$12a_{883}$	2	5	3	185	0	$1+2-4-4$	odwracalny	tak
$12a_{884}$	2	5	3	299	-2	$1-1+1+1-1$	chiralny	tak
$12a_{885}$	2	5	3	287	-2	$1+0+2+1-1$	chiralny	tak
$12a_{886}$	2..3	5	3	207	2	$1-4-2-1-1$	odwracalny	tak
$12a_{887}$	1	5	3	289	0	$1+0-2-1+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{888}$	1	5	3	303	-2	$1+0+1+1-1$	chiralny	tak
$12a_{889}$	2	4	3	167	2	$1+2-2-6-2$	chiralny	tak
$12a_{890}$	2	5	3	205	0	$1+1-3-4$	-zwierciadlany	tak
$12a_{891}$	2	4	3	233	-4	$1+2+3+5+2$	chiralny	tak
$12a_{892}$	2	5	3	227	-2	$1+1+2+4$	chiralny	tak
$12a_{893}$	1	5	3	309	0	$1-1-1-1+1$	chiralny	tak
$12a_{894}$	2	4	3	273	0	$1+0+1+4+2$	chiralny	tak
$12a_{895}$	2	4	3	243	-2	$1+1-7-6-2$	chiralny	tak
$12a_{896}$	2..3	4	3	203	-2	$1+3+0-5-2$	odwracalny	tak
$12a_{897}$	2	5	3	217	0	$1+2-2-4$	odwracalny	tak
$12a_{898}$	2..3	3	3	167	2	$1+6+15+14+6+1$	chiralny	tak
$12a_{899}$	2..3	4	3	173	0	$1+5+12+8+2$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{900}$	3..4	5	3	247	-6	$1+10+19+8$	chiralny	tak
$12a_{901}$	2..3	5	3	223	2	$1+4+7+1-1$	chiralny	tak
$12a_{902}$	2	6	3	213	0	$1+3+6-2$	chiralny	tak
$12a_{903}$	2	5	3	249	-4	$1+2-4-5$	chiralny	tak
$12a_{904}$	2	4	3	183	-2	$1+2-3-6-2$	odwracalny	tak
$12a_{905}$	2	5	3	189	0	$1+1-4-4$	odwracalny	tak
$12a_{906}$	2	5	3	245	0	$1-5-2+0+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{907}$	3	4	3	225	-4	$1+4+3+5+2$	odwracalny	tak
$12a_{908}$	2	5	3	235	-2	$1+3+2+4$	odwracalny	tak
$12a_{909}$	2	3	3	105	-4	$1-2-10-12-6-1$	chiralny	tak
$12a_{910}$	2	4	3	179	-2	$1-3-8-7-2$	chiralny	tak
$12a_{911}$	2..3	4	3	191	-2	$1-4-9-7-2$	chiralny	tak
$12a_{912}$	2..3	5	3	117	0	$1-5-6-3$	chiralny	tak
$12a_{913}$	2	5	3	219	-2	$1-1-2-1-1$	chiralny	tak
$12a_{914}$	2	5	3	255	2	$1+4+5+5$	chiralny	tak
$12a_{915}$	2	6	3	271	-2	$1+0-5+3$	chiralny	tak
$12a_{916}$	2..3	3	3	147	2	$1+5+12+13+6+1$	chiralny	tak
$12a_{917}$	2	4	3	193	0	$1+4+9+7+2$	chiralny	tak
$12a_{918}$	2	5	3	247	2	$1+2+5+1-1$	chiralny	tak
$12a_{919}$	1	6	3	189	0	$1+1+4-2$	chiralny	tak
$12a_{920}$	2	3	3	125	-4	$1+1-8-12-6-1$	chiralny	tak
$12a_{921}$	3	4	3	175	-2	$1+0-7-7-2$	chiralny	tak
$12a_{922}$	2	4	3	283	-2	$1-1-6-5-2$	chiralny	tak
$12a_{923}$	3	4	3	135	-6	$1+2-4-7-2$	chiralny	tak
$12a_{924}$	2	5	3	189	-4	$1+1-4-4$	chiralny	tak
$12a_{925}$	2	4	3	245	0	$1+3+8+6+2$	chiralny	tak
$12a_{926}$	2	4	3	127	-2	$1+0-8-8-2$	chiralny	tak
$12a_{927}$	2	5	3	165	0	$1-1-6-4$	chiralny	tak
$12a_{928}$	1	5	3	309	0	$1-1+3+0+1$	chiralny	tak
$12a_{929}$	2	4	3	203	-2	$1-1-5-6-2$	chiralny	tak
$12a_{930}$	3	4	3	147	-6	$1+1-5-7-2$	chiralny	tak
$12a_{931}$	2	5	3	177	-4	$1+0-5-4$	chiralny	tak
$12a_{932}$	2	5	3	211	-2	$1-3-2-1-1$	chiralny	tak
$12a_{933}$	2	5	3	227	2	$1+1+2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{934}$	2	4	3	235	-2	$1-1-7-6-2$	chiralny	tak
$12a_{935}$	1	5	3	269	0	$1+1+1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{936}$	2	5	3	201	0	$1-2-4-4$	chiralny	tak
$12a_{937}$	3	4	3	79	-6	$1+0-9-9-2$	odwracalny	tak
$12a_{938}$	2..3	5	3	133	-4	$1-1-8-4$	odwracalny	tak
$12a_{939}$	2	6	3	159	-2	$1+0-10$	odwracalny	tak
$12a_{940}$	2..3	6	3	165	0	$1-5+1-2$	odwracalny	tak
$12a_{941}$	2	4	3	135	-2	$1-2-9-8-2$	chiralny	tak
$12a_{942}$	2	5	3	173	0	$1-3-6-4$	chiralny	tak
$12a_{943}$	2	5	3	221	0	$1-3-3-4$	chiralny	tak
$12a_{944}$	1	4	3	165	0	$1+3+7+7+2$	chiralny	tak
$12a_{945}$	2	5	3	199	-2	$1+2+4+4$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{946}$	3	4	3	151	-6	$1+2-5-7-2$	chiralny	tak
$12a_{947}$	2..3	5	3	157	-4	$1+1-6-4$	chiralny	tak
$12a_{948}$	2	5	3	251	-2	$1+3+5+1-1$	chiralny	tak
$12a_{949}$	2	4	3	207	-2	$1+0-5-6-2$	chiralny	tak
$12a_{950}$	2	5	3	197	0	$1-1-4-4$	chiralny	tak
$12a_{951}$	2	5	3	295	2	$1+2+2+1-1$	chiralny	tak
$12a_{952}$	3	4	3	123	-6	$1+3-3-7-2$	chiralny	tak
$12a_{953}$	2	5	3	185	-4	$1+2-4-4$	chiralny	tak
$12a_{954}$	1	4	3	211	-2	$1+1-5-6-2$	chiralny	tak
$12a_{955}$	2	5	3	193	0	$1+0-4-4$	chiralny	tak
$12a_{956}$	2	4	3	209	4	$1+4+6+6+2$	chiralny	tak
$12a_{957}$	2..3	5	3	203	2	$1+3+4+4$	chiralny	tak
$12a_{958}$	2	4	3	197	4	$1+3+5+6+2$	chiralny	tak
$12a_{959}$	2	5	3	215	2	$1+2+3+4$	chiralny	tak
$12a_{960}$	2	5	3	281	0	$1-2+1-4$	-zwierciadlany	tak
$12a_{961}$	2	5	3	277	0	$1-1-3-1+1$	chiralny	tak
$12a_{962}$	2	5	3	239	-2	$1+4+6+1-1$	chiralny	tak
$12a_{963}$	2	5	3	221	0	$1+1-6-5$	chiralny	tak
$12a_{964}$	2	5	3	255	2	$1+0+4+1-1$	chiralny	tak
$12a_{965}$	2	5	3	297	0	$1-2-2-1+1$	chiralny	tak
$12a_{966}$	1	4	3	217	0	$1+2+6+6+2$	chiralny	tak
$12a_{967}$	2..3	5	3	253	4	$1+5-3-5$	chiralny	tak
$12a_{968}$	2	5	3	193	0	$1-4-5+0+1$	chiralny	tak
$12a_{969}$	2	6	3	139	-2	$1-5-2+2$	chiralny	tak
$12a_{970}$	2	4	3	105	4	$1+2+7+8+2$	chiralny	tak
$12a_{971}$	2	5	3	163	2	$1+1+6+4$	chiralny	tak
$12a_{972}$	2	4	3	183	2	$1-2-4-6-2$	chiralny	tak
$12a_{973}$	3..4	5	3	243	-6	$1+9+19+8$	odwracalny	tak
$12a_{974}$	2..3	6	3	177	-4	$1+8+13$	odwracalny	tak
$12a_{975}$	2	6	3	225	0	$1+0-2-4$	odwracalny	tak
$12a_{976}$	1	6	3	279	2	$1+2-1+4$	odwracalny	tak
$12a_{977}$	3	4	3	175	-6	$1+4-2-6-2$	odwracalny	tak
$12a_{978}$	2..3	5	3	133	-4	$1+3-3-3$	odwracalny	tak
$12a_{979}$	2	4	3	225	0	$1+4+7+6+2$	chiralny	tak
$12a_{980}$	2	4	3	257	4	$1+4+5+5+2$	chiralny	tak
$12a_{981}$	2..3	3	3	135	2	$1+6+13+13+6+1$	chiralny	tak
$12a_{982}$	2	4	3	189	0	$1+5+9+7+2$	chiralny	tak
$12a_{983}$	2..3	5	3	229	-4	$1+3-5-5$	chiralny	tak
$12a_{984}$	3	3	3	103	6	$1+6+11+12+6+1$	chiralny	tak
$12a_{985}$	2..3	4	3	157	4	$1+5+7+7+2$	chiralny	tak
$12a_{986}$	2	4	3	285	0	$1+1+2+4+2$	chiralny	tak
$12a_{987}$	2	4	3	225	4	$1+4+7+6+2$	chiralny	tak
$12a_{988}$	2..3	4	3	125	4	$1+5+9+8+2$	chiralny	tak
$12a_{989}$	2..3	5	3	175	2	$1+4+6+4$	chiralny	tak
$12a_{990}$	2	5	3	225	0	$1+0-2+0+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{991}$	2	5	3	209	4	$1+0-3+0+1$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{992}$	2	5	3	265	0	$1-2-4-1+1$	chiralny	tak
$12a_{993}$	1	4	3	193	0	$1+0+4+6+2$	chiralny	tak
$12a_{994}$	2	4	3	287	-2	$1+0-2-4-2$	chiralny	tak
$12a_{995}$	3..4	5	3	227	-6	$1+9+20+8$	chiralny	tak
$12a_{996}$	2..3	6	3	193	-4	$1+8+14$	chiralny	tak
$12a_{997}$	2	4	3	215	-2	$1-2-6-6-2$	chiralny	tak
$12a_{998}$	1	4	3	251	-2	$1-1-4-5-2$	chiralny	tak
$12a_{999}$	2..3	3	3	171	2	$1+7+15+14+6+1$	odwracalny	tak
$12a_{1000}$	2..3	4	3	153	0	$1+6+11+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{1001}$	2	5	3	189	0	$1-3-5-4$	chiralny	tak
$12a_{1002}$	2	3	3	183	2	$1+2+5+8+5+1$	chiralny	tak
$12a_{1003}$	2	4	3	233	4	$1+6+8+6+2$	chiralny	tak
$12a_{1004}$	3..4	5	3	259	-6	$1+9+18+8$	odwracalny	tak
$12a_{1005}$	1	4	3	241	0	$1+0+3+5+2$	chiralny	tak
$12a_{1006}$	2	4	3	205	0	$1+1+5+6+2$	chiralny	tak
$12a_{1007}$	2	4	3	143	2	$1+0-5-7-2$	chiralny	tak
$12a_{1008}$	1	5	3	197	0	$1-1-4-4$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1009}$	2..3	4	3	137	-4	$1+2+5+7+2$	chiralny	tak
$12a_{1010}$	2	5	3	195	-2	$1+1+4+4$	odwracalny	tak
$12a_{1011}$	1	3	3	121	0	$1-2-9-12-6-1$	chiralny	tak
$12a_{1012}$	2	4	3	163	-2	$1-3-7-7-2$	chiralny	tak
$12a_{1013}$	2	3	3	119	-2	$1+2+9+12+6+1$	chiralny	tak
$12a_{1014}$	2	4	3	173	0	$1+1+7+7+2$	chiralny	tak
$12a_{1015}$	2	4	3	131	2	$1-3-9-8-2$	chiralny	tak
$12a_{1016}$	2..3	5	3	177	0	$1-4-6-4$	chiralny	tak
$12a_{1017}$	2..3	4	3	109	-4	$1+1+7+8+2$	chiralny	tak
$12a_{1018}$	2	5	3	159	-2	$1+0+6+4$	chiralny	tak
$12a_{1019}$	2	5	3	361	0	$1+2-1-2+1$	całkowicie	tak
$12a_{1020}$	2	5	3	319	-2	$1+0+0+1-1$	odwracalny	tak
$12a_{1021}$	2	5	3	339	-2	$1+1-1+1-1$	chiralny	tak
$12a_{1022}$	2	6	3	243	-2	$1+1-3+3$	odwracalny	tak
$12a_{1023}$	1	4	$^{127}/_{29}$	127	-2	$1+0-8-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{1024}$	2	5	$^{149}/_{40}$	149	0	$1-1-7-4$	odwracalny	tak
$12a_{1025}$	2	4	3	255	2	$1+4+1-4-2$	odwracalny	tak
$12a_{1026}$	2	5	3	165	0	$1+3-1-3$	odwracalny	tak
$12a_{1027}$	2	3	3	83	2	$1+5+16+17+7+1$	odwracalny	tak
$12a_{1028}$	2..3	4	3	113	0	$1+4+12+9+2$	odwracalny	tak
$12a_{1029}$	2	4	$^{81}/_{19}$	81	0	$1+4+14+10+2$	odwracalny	tak
$12a_{1030}$	2	5	$^{91}/_{19}$	91	-2	$1+3+11+4$	odwracalny	tak
$12a_{1031}$	2..3	4	3	97	4	$1+4+11+9+2$	odwracalny	tak
$12a_{1032}$	2	5	3	139	2	$1+3+8+4$	odwracalny	tak
$12a_{1033}$	2	5	$^{107}/_{25}$	107	2	$1+3+10+4$	odwracalny	tak
$12a_{1034}$	1	6	$^{121}/_{32}$	121	0	$1+2+8$	odwracalny	tak
$12a_{1035}$	3..4	5	3	155	-6	$1+11+21+7$	odwracalny	tak
$12a_{1036}$	3	4	3	159	-6	$1+4-1-6-2$	chiralny	tak
$12a_{1037}$	2..4	6	3	185	-4	$1+10+14$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{1038}$	2	5	3	197	-4	$1+3-3-4$	chiralny	tak
$12a_{1039}$	2..3	5	$^{137}/_{37}$	137	0	$1-6-5+1+1$	całkowicie	tak
$12a_{1040}$	2..3	6	$^{115}/_{26}$	115	2	$1-7-1+2$	odwracalny	tak
$12a_{1041}$	2	4	3	265	-4	$1+2+1+4+2$	odwracalny	tak
$12a_{1042}$	2	4	3	253	0	$1+1+4+5+2$	odwracalny	tak
$12a_{1043}$	2	5	3	207	-2	$1+0+3+4$	odwracalny	tak
$12a_{1044}$	2	5	3	195	-2	$1+1+0+3$	odwracalny	tak
$12a_{1045}$	2	5	3	161	-4	$1+0-6+0+1$	odwracalny	tak
$12a_{1046}$	2	6	3	203	-2	$1-1-5+2$	odwracalny	tak
$12a_{1047}$	2	3	3	143	2	$1+4+12+13+6+1$	chiralny	tak
$12a_{1048}$	1	4	3	197	0	$1+3+9+7+2$	chiralny	tak
$12a_{1049}$	2	5	3	215	2	$1+2+7+1-1$	chiralny	tak
$12a_{1050}$	2..3	5	3	285	0	$1-3+1+0+1$	odwracalny	tak
$12a_{1051}$	2	3	3	113	-4	$1+0-9-12-6-1$	chiralny	tak
$12a_{1052}$	2	4	3	187	-2	$1-1-8-7-2$	chiralny	tak
$12a_{1053}$	2	4	3	233	0	$1+2+7+6+2$	chiralny	tak
$12a_{1054}$	2	5	3	227	2	$1+1+6+1-1$	chiralny	tak
$12a_{1055}$	2	6	3	209	0	$1+0+5-2$	chiralny	tak
$12a_{1056}$	1	4	3	247	-2	$1-2-8-6-2$	chiralny	tak
$12a_{1057}$	2	6	3	249	0	$1+2+4-3$	chiralny	tak
$12a_{1058}$	2	6	3	221	0	$1+1+6-2$	chiralny	tak
$12a_{1059}$	3	4	3	183	-6	$1+2-3-6-2$	chiralny	tak
$12a_{1060}$	1	4	3	183	-2	$1-2-8-7-2$	chiralny	tak
$12a_{1061}$	2	4	3	267	-2	$1-1-5-5-2$	chiralny	tak
$12a_{1062}$	2	5	3	141	-4	$1+1-3-3$	chiralny	tak
$12a_{1063}$	1	5	3	109	0	$1-3-6-3$	chiralny	tak
$12a_{1064}$	2	4	3	167	-2	$1-2-7-7-2$	chiralny	tak
$12a_{1065}$	2	5	3	301	0	$1+1+3+0+1$	chiralny	tak
$12a_{1066}$	2..3	4	3	163	-2	$1-3-11-8-2$	chiralny	tak
$12a_{1067}$	2	5	3	275	-2	$1-3-2+0-1$	chiralny	tak
$12a_{1068}$	2	5	3	145	0	$1-4-8-4$	chiralny	tak
$12a_{1069}$	2	6	3	235	-2	$1-1-7+2$	chiralny	tak
$12a_{1070}$	2	5	3	263	-2	$1-2-1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{1071}$	2	4	3	223	-2	$1+0-6-6-2$	chiralny	tak
$12a_{1072}$	2	4	3	241	4	$1+4+4+5+2$	chiralny	tak
$12a_{1073}$	2	5	3	213	-4	$1+3-2-4$	chiralny	tak
$12a_{1074}$	2	5	3	193	-4	$1+0-4+0+1$	chiralny	tak
$12a_{1075}$	2	5	3	181	0	$1-1-5-4$	chiralny	tak
$12a_{1076}$	1	5	3	273	0	$1+0+1+0+1$	chiralny	tak
$12a_{1077}$	2	5	3	171	2	$1+3+2+3$	chiralny	tak
$12a_{1078}$	2	4	3	277	0	$1+3+6+5+2$	chiralny	tak
$12a_{1079}$	2	4	3	267	-2	$1-1-5-5-2$	chiralny	tak
$12a_{1080}$	2..3	5	3	201	-4	$1-2-4+0+1$	chiralny	tak
$12a_{1081}$	1	5	3	217	0	$1-2-3+0+1$	chiralny	tak
$12a_{1082}$	2	5	3	185	-4	$1-2-5+0+1$	chiralny	tak
$12a_{1083}$	2	4	3	169	0	$1+2+7+7+2$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{1084}$	2..3	5	3	145	-4	$1-4-8+0+1$	chiralny	tak
$12a_{1085}$	2..3	6	3	187	-2	$1-5-5+2$	chiralny	tak
$12a_{1086}$	2	5	3	199	2	$1+2+4+4$	chiralny	tak
$12a_{1087}$	2	5	3	225	0	$1-4-3+0+1$	chiralny	tak
$12a_{1088}$	2	5	3	253	0	$1-3-5-1+1$	chiralny	tak
$12a_{1089}$	2..3	5	3	157	-4	$1-3-7+0+1$	chiralny	tak
$12a_{1090}$	2	6	3	175	-2	$1-4-4+2$	chiralny	tak
$12a_{1091}$	2	4	3	237	0	$1+1+7+6+2$	chiralny	tak
$12a_{1092}$	2	5	3	243	-2	$1+1+5+1-1$	chiralny	tak
$12a_{1093}$	2	5	3	207	-2	$1+0+3+0-1$	chiralny	tak
$12a_{1094}$	2	6	3	147	-2	$1-3-2+2$	chiralny	tak
$12a_{1095}$	2	5	3	99	2	$1+1+6+3$	chiralny	tak
$12a_{1096}$	2	5	3	271	2	$1+0-1+0-1$	chiralny	tak
$12a_{1097}$	2..4	6	3	217	-4	$1+10+16$	chiralny	tak
$12a_{1098}$	2	5	3	293	-4	$1+3-1-5$	chiralny	tak
$12a_{1099}$	2..3	4	3	217	4	$1+6+7+6+2$	chiralny	tak
$12a_{1100}$	2	4	3	261	0	$1+3+5+5+2$	odwracalny	tak
$12a_{1101}$	2	4	3	237	4	$1+5+4+5+2$	chiralny	tak
$12a_{1102}$	2	5	3	305	0	$1-4+2+0+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1103}$	2..3	5	3	195	2	$1+5+5+4$	chiralny	tak
$12a_{1104}$	2	5	3	215	2	$1+2+3+0-1$	chiralny	tak
$12a_{1105}$	2	5	3	289	0	$1+0+2+0+1$	całkowicie	tak
$12a_{1106}$	2	6	3	205	0	$1-3+0-3$	odwracalny	tak
$12a_{1107}$	2..3	4	3	113	4	$1+4+8+8+2$	chiralny	tak
$12a_{1108}$	2	5	3	155	2	$1+3+7+4$	chiralny	tak
$12a_{1109}$	2..3	4	3	247	-2	$1+2-3-5-2$	odwracalny	tak
$12a_{1110}$	2	5	3	283	-2	$1+3+3+5$	chiralny	tak
$12a_{1111}$	2	4	3	207	2	$1+0-1-5-2$	chiralny	tak
$12a_{1112}$	3..4	5	3	215	-6	$1+10+21+8$	odwracalny	tak
$12a_{1113}$	2..4	6	3	205	-4	$1+9+15$	odwracalny	tak
$12a_{1114}$	3..4	3	3	95	6	$1+8+12+12+6+1$	odwracalny	tak
$12a_{1115}$	2..4	4	3	165	4	$1+7+8+7+2$	odwracalny	tak
$12a_{1116}$	2..4	4	3	185	4	$1+6+9+7+2$	odwracalny	tak
$12a_{1117}$	2	6	3	273	-4	$1+4+2-4$	odwracalny	tak
$12a_{1118}$	2..3	5	3	115	2	$1+5+6+3$	odwracalny	tak
$12a_{1119}$	2	4	3	169	0	$1+2+7+7+2$	chiralny	tak
$12a_{1120}$	2	3	3	111	2	$1+4+10+12+6+1$	chiralny	tak
$12a_{1121}$	2	4	3	181	0	$1+3+8+7+2$	chiralny	tak
$12a_{1122}$	2	5	3	285	0	$1+1+2+0+1$	chiralny	tak
$12a_{1123}$	2	5	3	261	0	$1-1-4-1+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1124}$	2..3	7	3	205	0	$1-7+7-1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1125}$	2	5	$^{101}/_{23}$	101	-4	$1-1-10-4$	odwracalny	tak
$12a_{1126}$	1	6	$^{119}/_{26}$	119	-2	$1-2-8$	odwracalny	tak
$12a_{1127}$	2..3	7	$^{97}/_{22}$	97	0	$1-8+4$	całkowicie	tak
$12a_{1128}$	1	3	$^{59}/_{9}$	59	2	$1+3+13+16+7+1$	odwracalny	tak
$12a_{1129}$	1	4	$^{105}/_{23}$	105	0	$1+2+11+9+2$	odwracalny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{1130}$	1	4	$^{125}/_{27}$	125	0	$1+1+8+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{1131}$	2	4	$^{73}/_{11}$	73	4	$1+2+9+9+2$	odwracalny	tak
$12a_{1132}$	2	5	$^{131}/_{40}$	131	2	$1+1+8+4$	odwracalny	tak
$12a_{1133}$	2	5	$^{159}/_{47}$	159	2	$1+0+6+4$	odwracalny	tak
$12a_{1134}$	2	3	$^{53}/_{7}$	53	-4	$1-1-13-16-7-1$	odwracalny	tak
$12a_{1135}$	1	4	$^{103}/_{32}$	103	-2	$1-2-11-9-2$	odwracalny	tak
$12a_{1136}$	2	4	$^{147}/_{43}$	147	-2	$1-3-10-8-2$	odwracalny	tak
$12a_{1137}$	2	5	3	141	0	$1-3-8-4$	odwracalny	tak
$12a_{1138}$	2	5	$^{79}/_{14}$	79	-2	$1+0+7+3$	odwracalny	tak
$12a_{1139}$	1	6	$^{101}/_{18}$	101	0	$1-1+6$	odwracalny	tak
$12a_{1140}$	1	5	$^{97}/_{18}$	97	0	$1-4-7-3$	odwracalny	tak
$12a_{1141}$	2	5	3	167	-2	$1+2+6+0-1$	chiralny	tak
$12a_{1142}$	2	5	3	99	-2	$1+1+10+4$	odwracalny	tak
$12a_{1143}$	2	6	3	205	0	$1+1+5-2$	chiralny	tak
$12a_{1144}$	2	6	3	129	0	$1+0+8$	odwracalny	tak
$12a_{1145}$	2	4	$^{79}/_{15}$	79	-2	$1-4-14-10-2$	odwracalny	tak
$12a_{1146}$	2	5	$^{117}/_{34}$	117	0	$1-5-10-4$	odwracalny	tak
$12a_{1147}$	2..3	4	3	123	-2	$1-5-13-9-2$	odwracalny	tak
$12a_{1148}$	2..3	5	$^{73}/_{23}$	73	0	$1-6-9-3$	odwracalny	tak
$12a_{1149}$	2	6	$^{35}/_{4}$	35	2	$1-7-4$	odwracalny	tak
$12a_{1150}$	2	5	3	197	0	$1-5-5+0+1$	chiralny	tak
$12a_{1151}$	2..3	6	3	135	2	$1-6-2+2$	chiralny	tak
$12a_{1152}$	2	5	3	325	0	$1-1+0-1+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1153}$	2	5	3	137	-4	$1-2-8+0+1$	chiralny	tak
$12a_{1154}$	2	6	3	195	-2	$1-3-5+2$	chiralny	tak
$12a_{1155}$	2	5	3	273	-4	$1+4-2-5$	chiralny	tak
$12a_{1156}$	2	5	3	205	-4	$1+1-3+0+1$	odwracalny	tak
$12a_{1157}$	3	4	$^{39}/_{5}$	39	-6	$1-2-15-11-2$	odwracalny	tak
$12a_{1158}$	2	5	$^{77}/_{16}$	77	-4	$1-3-12-4$	odwracalny	tak
$12a_{1159}$	2..3	5	$^{113}/_{24}$	113	-4	$1-4-10-4$	odwracalny	tak
$12a_{1160}$	2..3	6	3	111	-2	$1-4-8$	odwracalny	tak
$12a_{1161}$	2	6	$^{75}/_{14}$	75	-2	$1-5-6$	odwracalny	tak
$12a_{1162}$	2..3	5	$^{69}/_{13}$	69	-4	$1-5-13-4$	odwracalny	tak
$12a_{1163}$	2..3	6	$^{103}/_{24}$	103	-2	$1-6-8$	odwracalny	tak
$12a_{1164}$	2..4	5	3	105	-4	$1-6-11-4$	odwracalny	tak
$12a_{1165}$	2..3	6	$^{67}/_{16}$	67	-2	$1-7-6$	odwracalny	tak
$12a_{1166}$	2	7	$^{33}/_{4}$	33	0	$1-8$	odwracalny	tak
$12a_{1167}$	2	5	3	313	0	$1-2-5-2+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1168}$	2	3	3	155	2	$1+3+11+13+6+1$	chiralny	tak
$12a_{1169}$	1	4	3	137	0	$1+2+9+8+2$	chiralny	tak
$12a_{1170}$	2	4	3	153	0	$1+2+10+8+2$	chiralny	tak
$12a_{1171}$	2	5	3	115	-2	$1+1+9+4$	chiralny	tak
$12a_{1172}$	2	4	3	221	0	$1+1+6+6+2$	chiralny	tak
$12a_{1173}$	2	6	3	231	-2	$1-2-3+3$	odwracalny	tak
$12a_{1174}$	2	4	3	145	0	$1+4+10+8+2$	chiralny	tak
$12a_{1175}$	2	4	3	223	-2	$1+0-6-6-2$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{1176}$	1	3	3	119	2	$1+2+9+12+6+1$	odwracalny	tak
$12a_{1177}$	2	4	3	189	0	$1+1+8+7+2$	odwracalny	tak
$12a_{1178}$	2	4	3	161	0	$1+0+6+7+2$	odwracalny	tak
$12a_{1179}$	2	5	3	91	−2	$1-1+6+3$	odwracalny	tak
$12a_{1180}$	2	4	3	165	0	$1+3+11+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{1181}$	2	5	3	135	−2	$1+2+8+4$	odwracalny	tak
$12a_{1182}$	1	4	3	187	−2	$1-1-8-7-2$	odwracalny	tak
$12a_{1183}$	2	5	3	121	−4	$1-2-9-4$	odwracalny	tak
$12a_{1184}$	2..3	4	3	177	−4	$1+4+4+6+2$	chiralny	tak
$12a_{1185}$	2	5	3	235	−2	$1+3+2+4$	chiralny	tak
$12a_{1186}$	2	4	3	245	−4	$1+3+4+5+2$	chiralny	tak
$12a_{1187}$	1	4	3	303	2	$1+0-3-4-2$	chiralny	tak
$12a_{1188}$	1	5	3	353	0	$1+0+2-1+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1189}$	2	5	3	267	−2	$1+3+0+4$	chiralny	tak
$12a_{1190}$	2	5	3	279	−2	$1+2+3+1-1$	chiralny	tak
$12a_{1191}$	2	3	3	153	4	$1+2-2-7-5-1$	chiralny	tak
$12a_{1192}$	2	4	3	227	2	$1+1-2-5-2$	chiralny	tak
$12a_{1193}$	2	4	3	323	2	$1+1+0-3-2$	odwracalny	tak
$12a_{1194}$	3	4	3	175	2	$1+0-3-6-2$	odwracalny	tak
$12a_{1195}$	2	5	3	239	−2	$1+0+5+1-1$	chiralny	tak
$12a_{1196}$	2	4	3	297	0	$1-2-2+3+2$	odwracalny	tak
$12a_{1197}$	2	4	3	237	0	$1+1+3+5+2$	chiralny	tak
$12a_{1198}$	1	5	3	223	−2	$1+0+2+4$	chiralny	tak
$12a_{1199}$	1	3	3	185	0	$1-2-5-8-5-1$	odwracalny	tak
$12a_{1200}$	2	4	3	195	2	$1-3-5-6-2$	odwracalny	tak
$12a_{1201}$	2	4	3	213	0	$1+3+6+6+2$	chiralny	tak
$12a_{1202}$	2..3	7	3	169	0	$1-6+9$	całkowicie	tak
$12a_{1203}$	2	3	3	143	2	$1+4+12+13+6+1$	odwracalny	tak
$12a_{1204}$	2	4	3	149	0	$1+3+10+8+2$	chiralny	tak
$12a_{1205}$	2..3	5	3	119	−2	$1+2+9+4$	odwracalny	tak
$12a_{1206}$	2	5	3	245	−4	$1+3+0-4$	odwracalny	tak
$12a_{1207}$	2	4	3	213	−4	$1+3+2+5+2$	chiralny	tak
$12a_{1208}$	2	5	3	247	−2	$1+2+1+4$	chiralny	tak
$12a_{1209}$	2	3	3	181	0	$1+3+0-7-5-1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1210}$	2..3	3	3	165	4	$1+3-1-7-5-1$	odwracalny	tak
$12a_{1211}$	2	3	3	265	0	$1+2+1-4-4-1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1212}$	2	3	3	231	−2	$1-2-3+3+4+1$	odwracalny	tak
$12a_{1213}$	2	4	3	253	0	$1-3-1+4+2$	odwracalny	tak
$12a_{1214}$	4	3	3	45	−8	$1+1-9-15-7-1$	odwracalny	tak
$12a_{1215}$	2	3	3	117	−4	$1-1-9-12-6-1$	chiralny	tak
$12a_{1216}$	2	4	3	183	2	$1+2+1-5-2$	odwracalny	tak
$12a_{1217}$	1	5	3	237	0	$1+1-1-4$	odwracalny	tak
$12a_{1218}$	2	3	3	109	0	$1+1-5-11-6-1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1219}$	1	3	3	123	2	$1+3+9+12+6+1$	chiralny	tak
$12a_{1220}$	3	3	3	91	6	$1+3+7+11+6+1$	odwracalny	tak
$12a_{1221}$	2	3	3	195	−2	$1+1+4+8+5+1$	chiralny	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{1222}$	2	3	3	205	0	$1+1-3-8-5-1$	odwracalny	tak
$12a_{1223}$	2..3	3	3	137	-4	$1-2-12-13-6-1$	chiralny	tak
$12a_{1224}$	2	4	3	147	-2	$1-3-10-8-2$	chiralny	tak
$12a_{1225}$	2	3	3	225	0	$1+0-6-9-5-1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1226}$	2	3	3	147	2	$1+5+12+13+6+1$	chiralny	tak
$12a_{1227}$	2	3	3	191	2	$1+0+4+8+5+1$	chiralny	tak
$12a_{1228}$	1	4	3	197	0	$1-1+4+6+2$	chiralny	tak
$12a_{1229}$	2	3	3	221	0	$1-3-7-9-5-1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1230}$	2	3	3	215	-2	$1+2+7+9+5+1$	chiralny	tak
$12a_{1231}$	1	3	3	193	0	$1+0-4-8-5-1$	chiralny	tak
$12a_{1232}$	2	4	3	187	-2	$1-1-4-6-2$	chiralny	tak
$12a_{1233}$	2	3	3	77	-4	$1-3-16-17-7-1$	odwracalny	tak
$12a_{1234}$	2	4	3	127	-2	$1-4-13-9-2$	odwracalny	tak
$12a_{1235}$	1	3	3	133	0	$1-1-8-12-6-1$	chiralny	tak
$12a_{1236}$	2	4	3	167	2	$1-2-7-7-2$	chiralny	tak
$12a_{1237}$	2	4	3	225	0	$1+0+2+5+2$	chiralny	tak
$12a_{1238}$	2	3	3	131	-2	$1+1+8+12+6+1$	chiralny	tak
$12a_{1239}$	1	4	3	177	0	$1+0+7+7+2$	chiralny	tak
$12a_{1240}$	2..3	4	3	97	-4	$1+0+6+8+2$	chiralny	tak
$12a_{1241}$	2	5	3	155	-2	$1-1+6+4$	chiralny	tak
$12a_{1242}$	3	4	3	47	-6	$1-4-16-11-2$	odwracalny	tak
$12a_{1243}$	2..3	5	3	85	-4	$1-5-12-4$	odwracalny	tak
$12a_{1244}$	2	4	3	119	-2	$1-2-8-8-2$	chiralny	tak
$12a_{1245}$	1	5	3	173	0	$1-3-6-4$	chiralny	tak
$12a_{1246}$	2	3	3	143	-2	$1+4+12+13+6+1$	odwracalny	tak
$12a_{1247}$	2..3	4	3	117	-4	$1+3+8+8+2$	odwracalny	tak
$12a_{1248}$	2	3	3	255	2	$1+0+0+4+4+1$	odwracalny	tak
$12a_{1249}$	1	3	3	257	0	$1+0+0-4-4-1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1250}$	1	3	3	217	0	$1-2-7-9-5-1$	odwracalny	tak
$12a_{1251}$	2	5	3	265	0	$1+2+1-4$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1252}$	2	4	3	231	-2	$1-2-7-6-2$	chiralny	tak
$12a_{1253}$	2	3	3	207	2	$1+4+8+9+5+1$	chiralny	tak
$12a_{1254}$	2..3	3	3	145	0	$1-4-12-13-6-1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1255}$	2..3	3	3	177	-4	$1+0-5-8-5-1$	chiralny	tak
$12a_{1256}$	2..3	4	3	139	2	$1-5-10-8-2$	chiralny	tak
$12a_{1257}$	2	4	3	203	-2	$1-1-5-6-2$	chiralny	tak
$12a_{1258}$	1	3	3	157	0	$1-3-11-13-6-1$	chiralny	tak
$12a_{1259}$	2	4	3	143	2	$1-4-10-8-2$	chiralny	tak
$12a_{1260}$	2	3	3	153	0	$1-2-11-13-6-1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1261}$	2	4	3	195	-2	$1-3-9-7-2$	chiralny	tak
$12a_{1262}$	2	4	3	147	2	$1-3-10-8-2$	chiralny	tak
$12a_{1263}$	2	5	3	211	2	$1+1+3+4$	chiralny	tak
$12a_{1264}$	2	4	3	127	-2	$1-4-9-8-2$	chiralny	tak
$12a_{1265}$	2	5	3	165	0	$1-5-7-4$	chiralny	tak
$12a_{1266}$	2..3	5	3	129	-4	$1-4-9-4$	chiralny	tak
$12a_{1267}$	2	5	3	145	0	$1-4-8-4$	-zwierciadlany	tak

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12a_{1268}$	1	4	3	221	0	$1+1+6+6+2$	chiralny	tak
$12a_{1269}$	2..3	5	3	169	0	$1-6-7-4$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1270}$	2	4	3	255	-2	$1+0-4-5-2$	odwracalny	tak
$12a_{1271}$	1	5	3	191	2	$1+0+4+4$	chiralny	tak
$12a_{1272}$	2	4	3	201	0	$1+2+5+6+2$	chiralny	tak
$12a_{1273}$	1	3	$^{61}/_{11}$	61	0	$1-3-13-16-7-1$	całkowicie	tak
$12a_{1274}$	2	4	$^{95}/_{17}$	95	2	$1-4-11-9-2$	odwracalny	tak
$12a_{1275}$	2	5	$^{149}/_{44}$	149	0	$1-5-8-4$	całkowicie	tak
$12a_{1276}$	2	4	$^{75}/_{13}$	75	2	$1-5-14-10-2$	odwracalny	tak
$12a_{1277}$	2	5	$^{121}/_{37}$	121	0	$1-6-10-4$	odwracalny	tak
$12a_{1278}$	2..3	5	$^{41}/_{6}$	41	4	$1-6-11-3$	odwracalny	tak
$12a_{1279}$	2..3	6	$^{67}/_{10}$	67	2	$1-7-6$	odwracalny	tak
$12a_{1280}$	2	5	3	241	0	$1-4-6-1+1$	-zwierciadlany	tak
$12a_{1281}$	2..3	5	$^{109}/_{33}$	109	0	$1-7-11-4$	całkowicie	tak
$12a_{1282}$	2..3	6	$^{63}/_{10}$	63	2	$1-8-6$	odwracalny	tak
$12a_{1283}$	2	3	3	81	0	$1-4-16-17-7-1$	odwracalny	tak
$12a_{1284}$	2	4	3	123	2	$1-5-13-9-2$	odwracalny	tak
$12a_{1285}$	2..3	4	3	87	2	$1-6-15-10-2$	odwracalny	tak
$12a_{1286}$	2..3	5	3	45	4	$1-7-11-3$	odwracalny	tak
$12a_{1287}$	2..3	7	$^{37}/_{6}$	37	0	$1-9$	całkowicie	tak
$12a_{1288}$	2..3	3	3	117	0	$1-5-18-18-7-1$	całkowicie	tak
$12n_{1}$	1	5	3	57	0	$1-2-1-1$	chiralny	nie
$12n_{2}$	1..2	5	3	83	-2	$1+1-1-3-1$	chiralny	nie
$12n_{3}$	1..2	5	3	73	0	$1+2+1-1$	chiralny	nie
$12n_{4}$	1	5	3	81	0	$1+0+1-1$	chiralny	nie
$12n_{5}$	1	5	3	87	2	$1+2-1+1$	chiralny	nie
$12n_{6}$	2	5	3	45	-4	$1+1-1+3+1$	chiralny	nie
$12n_{7}$	1	5	3	39	2	$1-2+1+1$	chiralny	nie
$12n_{8}$	2..3	5	3	61	-4	$1-3-1+3+1$	chiralny	nie
$12n_{9}$	1..2	5	3	71	2	$1-2-1+1$	chiralny	nie
$12n_{10}$	2	5	3	39	2	$1-2+1+1$	chiralny	nie
$12n_{11}$	1..2	6	3	61	0	$1-3+3$	odwracalny	nie
$12n_{12}$	1..2	6	3	79	-2	$1-4+2+2$	odwracalny	nie
$12n_{13}$	1	6	3	29	0	$1-3+1$	odwracalny	nie
$12n_{14}$	1..2	5	3	89	0	$1-2+1-1$	chiralny	nie
$12n_{15}$	2	5	3	111	2	$1+0-3+1$	chiralny	nie
$12n_{16}$	2	5	3	21	-4	$1-1-3+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{17}$	2	5	3	91	2	$1-1-2+1$	chiralny	nie
$12n_{18}$	1..2	6	3	109	0	$1-3+2-1$	chiralny	nie
$12n_{19}$	1..2	6	3	1	0	$1-4+3+1$	chiralny	nie
$12n_{20}$	1	4	3	47	2	$1+0+1+1$	chiralny	nie
$12n_{21}$	1..2	5	3	119	-2	$1-2+0+2$	chiralny	nie
$12n_{22}$	1..2	5	3	141	0	$1-3+0+2+1$	chiralny	nie
$12n_{23}$	1	5	3	9	0	$1-2$	chiralny	nie
$12n_{24}$	1	4	3	49	0	$1+0-1-1$	chiralny	nie
$12n_{25}$	1	5	3	11	2	$1-1-1$	odwracalny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{26}$	1..2	5	3	97	0	$1+0-2-2$	chiralny	nie
$12n_{27}$	2	5	3	123	-2	$1-1+0-2-1$	chiralny	nie
$12n_{28}$	1	5	3	33	0	$1+0+2$	chiralny	nie
$12n_{29}$	1..2	5	3	119	-2	$1-2+0+2$	chiralny	nie
$12n_{30}$	1..2	5	3	141	0	$1-3+0+2+1$	chiralny	nie
$12n_{31}$	1	5	3	9	0	$1-2$	chiralny	nie
$12n_{32}$	1..2	5	3	97	0	$1+0-2-2$	chiralny	nie
$12n_{33}$	2	5	3	123	-2	$1-1+0-2-1$	chiralny	nie
$12n_{34}$	1	5	3	33	0	$1+0+2$	chiralny	nie
$12n_{35}$	1	5	3	69	0	$1-1+0-1$	odwracalny	nie
$12n_{36}$	1	5	3	91	2	$1-1-2+1$	odwracalny	nie
$12n_{37}$	2	5	3	41	-4	$1-2-2+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{38}$	1	5	3	67	2	$1+1+0+1$	odwracalny	nie
$12n_{39}$	1	5	3	93	0	$1+1+2-1$	odwracalny	nie
$12n_{40}$	2	5	3	63	-2	$1+0+0-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{41}$	1..2	5	3	19	2	$1-3+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{42}$	1..2	5	3	59	-2	$1-1+0+1$	odwracalny	nie
$12n_{43}$	1..2	5	3	81	0	$1-4+0+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{44}$	1..2	5	3	51	-2	$1-3+0+1$	odwracalny	nie
$12n_{45}$	1..2	5	3	37	0	$1-1-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{46}$	1	6	3	41	0	$1-2+2$	odwracalny	nie
$12n_{47}$	1..2	6	3	59	-2	$1-5+3+2$	odwracalny	nie
$12n_{48}$	1..2	6	3	49	0	$1-4+2$	odwracalny	nie
$12n_{49}$	1..2	6	3	81	0	$1-4+4$	chiralny	nie
$12n_{50}$	1..2	6	3	99	-2	$1-3+1+2$	chiralny	nie
$12n_{51}$	1..2	6	3	9	0	$1-2$	chiralny	nie
$12n_{52}$	2	5	3	123	2	$1+3-3+1$	odwracalny	nie
$12n_{53}$	1..2	5	3	57	0	$1-2+3$	odwracalny	nie
$12n_{54}$	2	4	3	29	4	$1+1-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{55}$	2	5	4	111	-2	$1+0+1+2$	odwracalny	nie
$12n_{56}$	2	5	4	9	0	$1+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{57}$	2	5	4	9	0	$1+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{58}$	2	5	4	129	4	$1+4+1-2$	odwracalny	nie
$12n_{59}$	3	5	4	21	-4	$1+3-2-5-1$	odwracalny	nie
$12n_{60}$	2	5	4	99	-2	$1+1-2-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{61}$	2	5	4	99	-2	$1+1-2-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{62}$	2	5	4	81	0	$1+0-3-2$	odwracalny	nie
$12n_{63}$	2	5	4	39	2	$1-2-3$	odwracalny	nie
$12n_{64}$	2	5	4	69	-4	$1-1+0+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{65}$	1	5	3	31	2	$1+0-2$	odwracalny	nie
$12n_{66}$	2	5	4	81	0	$1+0-3-2$	odwracalny	nie
$12n_{67}$	3	5	4	51	6	$1+5+2-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{68}$	3	5	3	35	-6	$1+5+3-3-1$	chiralny	nie
$12n_{69}$	1	5	3	73	0	$1+2+1-1$	chiralny	nie
$12n_{70}$	1	5	3	79	-2	$1+0-1+1$	chiralny	nie
$12n_{71}$	1..2	5	3	59	-2	$1+3+1-3-1$	chiralny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{72}$	2	5	3	97	-4	$1+4+3-1$	chiralny	nie
$12n_{73}$	2	5	3	55	2	$1+2+1+1$	chiralny	nie
$12n_{74}$	4	4	3	49	-8	$1+8+17+11+2$	chiralny	nie
$12n_{75}$	1..3	4	3	83	2	$1+5+8+3$	chiralny	nie
$12n_{76}$	2	4	3	53	-4	$1+3+0-1$	chiralny	nie
$12n_{77}$	3	5	3	43	-6	$1+7+11+3$	odwracalny	nie
$12n_{78}$	2	5	3	65	0	$1+4+5$	odwracalny	nie
$12n_{79}$	1	5	3	23	-2	$1+2-1$	odwracalny	nie
$12n_{80}$	1..2	4	3	67	2	$1+5+5+2$	chiralny	nie
$12n_{81}$	2	4	3	101	-4	$1+3-1-2$	chiralny	nie
$12n_{82}$	1..2	5	3	35	2	$1+5+7+2$	chiralny	nie
$12n_{83}$	2	5	3	105	-4	$1+2-1-2$	chiralny	nie
$12n_{84}$	1..3	4	3	63	-2	$1+4+5+2$	chiralny	nie
$12n_{85}$	2	5	3	65	0	$1+0-4-2$	chiralny	nie
$12n_{86}$	1..2	5	3	103	-2	$1+2+2+2$	chiralny	nie
$12n_{87}$	1..2	5	3	49	0	$1+4+4$	chiralny	nie
$12n_{88}$	3	4	3	119	-6	$1+6+10+4$	odwracalny	nie
$12n_{89}$	3	4	3	43	-6	$1+3-2-4-1$	chiralny	nie
$12n_{90}$	2..3	4	3	77	4	$1+5+6+4+1$	chiralny	nie
$12n_{91}$	4	4	3	59	-6	$1+7+14+8+1$	chiralny	nie
$12n_{92}$	1..3	4	3	109	0	$1+5+8+4+1$	chiralny	nie
$12n_{93}$	3	5	3	11	-6	$1+3+0-4-1$	chiralny	nie
$12n_{94}$	2	5	3	73	-4	$1+2-3-2$	chiralny	nie
$12n_{95}$	2	5	3	95	2	$1+4+3+2$	chiralny	nie
$12n_{96}$	3	5	3	7	-6	$1+6+9+2$	chiralny	nie
$12n_{97}$	1..2	5	3	41	0	$1+2-1-1$	chiralny	nie
$12n_{98}$	2..3	5	3	93	-4	$1+1-2+2+1$	chiralny	nie
$12n_{99}$	2	5	3	135	-2	$1+2+0+2$	chiralny	nie
$12n_{100}$	3..4	5	3	111	-6	$1+8+15+5$	chiralny	nie
$12n_{101}$	1..3	5	3	141	0	$1+5+6-1$	chiralny	nie
$12n_{102}$	2	5	3	21	-4	$1+3-2-1$	chiralny	nie
$12n_{103}$	3	4	3	47	-6	$1+4-2-4-1$	chiralny	nie
$12n_{104}$	2..3	4	3	73	4	$1+6+6+4+1$	chiralny	nie
$12n_{105}$	4	4	3	31	-6	$1+8+16+8+1$	chiralny	nie
$12n_{106}$	1..2	4	3	81	0	$1+4+6+4+1$	chiralny	nie
$12n_{107}$	3	4	3	39	-6	$1+2-2-4-1$	chiralny	nie
$12n_{108}$	2	5	3	69	-4	$1+3-3-2$	chiralny	nie
$12n_{109}$	2	5	3	99	2	$1+5+3+2$	chiralny	nie
$12n_{110}$	3	5	3	21	-4	$1+7+11+2$	chiralny	nie
$12n_{111}$	1..2	5	3	91	-2	$1+3+3+2$	chiralny	nie
$12n_{112}$	2	5	3	77	-4	$1+1-3-2$	chiralny	nie
$12n_{113}$	2..3	3	3	53	4	$1+7+9+5+1$	chiralny	nie
$12n_{114}$	3	3	3	67	-6	$1+5+1-3-1$	chiralny	nie
$12n_{115}$	1..3	4	3	11	2	$1+7+13+7+1$	chiralny	nie
$12n_{116}$	2	4	3	71	2	$1+6+5+2$	chiralny	nie
$12n_{117}$	2	4	3	97	-4	$1+4-1-2$	chiralny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{118}$	1..3	5	3	7	2	$1+6+9+2$	chiralny	nie
$12n_{119}$	2	4	3	17	-4	$1+0-3-1$	chiralny	nie
$12n_{120}$	2	4	3	19	2	$1+5+4+1$	chiralny	nie
$12n_{121}$	1	4	3	1	0	$1+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{122}$	1..2	5	3	107	-2	$1+3+2-2-1$	chiralny	nie
$12n_{123}$	2	5	3	145	-4	$1+4+2-2$	chiralny	nie
$12n_{124}$	1	5	3	7	2	$1+2$	chiralny	nie
$12n_{125}$	2..3	5	3	93	-4	$1+1-2+2+1$	chiralny	nie
$12n_{126}$	2	5	3	135	-2	$1+2+0+2$	chiralny	nie
$12n_{127}$	1..2	5	3	107	-2	$1+3+2-2-1$	chiralny	nie
$12n_{128}$	2	5	3	145	-4	$1+4+2-2$	chiralny	nie
$12n_{129}$	1	5	3	7	2	$1+2$	chiralny	nie
$12n_{130}$	2	5	3	65	0	$1+0-4-2$	chiralny	nie
$12n_{131}$	1..2	5	3	103	-2	$1+2+2+2$	chiralny	nie
$12n_{132}$	1..2	5	3	49	0	$1+4+4$	chiralny	nie
$12n_{133}$	3	4	3	119	-6	$1+6+10+4$	chiralny	nie
$12n_{134}$	3	4	3	43	-6	$1+3-2-4-1$	chiralny	nie
$12n_{135}$	2..3	4	3	77	4	$1+5+6+4+1$	chiralny	nie
$12n_{136}$	4	4	3	59	-6	$1+7+14+8+1$	chiralny	nie
$12n_{137}$	1..3	4	3	109	0	$1+5+8+4+1$	chiralny	nie
$12n_{138}$	3	5	3	11	-6	$1+3+0-4-1$	chiralny	nie
$12n_{139}$	2..3	5	3	69	-4	$1+3+1+3+1$	chiralny	nie
$12n_{140}$	1..3	5	3	111	-2	$1+0-3+1$	chiralny	nie
$12n_{141}$	1..2	5	3	57	0	$1-2-1-1$	chiralny	nie
$12n_{142}$	1	5	3	43	-2	$1-1+1+1$	odwracalny	nie
$12n_{143}$	2	5	3	13	-4	$1+1-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{144}$	2	5	3	75	2	$1-1-1+1$	odwracalny	nie
$12n_{145}$	2	5	3	25	0	$1-2+1$	odwracalny	nie
$12n_{146}$	1	5	3	47	2	$1+4-2$	chiralny	nie
$12n_{147}$	3	4	3	75	-2	$1+3+4+2$	odwracalny	nie
$12n_{148}$	3	4	3	17	4	$1+8+7+1$	chiralny	nie
$12n_{149}$	2	5	3	5	4	$1+7+2$	chiralny	nie
$12n_{150}$	2	5	3	57	-4	$1+2+0+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{151}$	2	5	3	99	-2	$1+1-2+1$	odwracalny	nie
$12n_{152}$	1	5	3	69	0	$1-1+0-1$	odwracalny	nie
$12n_{153}$	4	4	3	13	-8	$1+9+19+12+2$	odwracalny	nie
$12n_{154}$	1..2	4	3	47	2	$1+4+6+2$	odwracalny	nie
$12n_{155}$	2	4	3	89	-4	$1+2-2-2$	odwracalny	nie
$12n_{156}$	2	5	3	33	-4	$1+0-2+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{157}$	2	5	3	75	-2	$1+3+0+1$	odwracalny	nie
$12n_{158}$	1..2	5	3	93	0	$1+1+2-1$	odwracalny	nie
$12n_{159}$	1..2	4	3	55	2	$1+6+6+2$	odwracalny	nie
$12n_{160}$	1..2	5	3	53	0	$1+3+0-1$	odwracalny	nie
$12n_{161}$	2	5	3	91	-2	$1-1-2+1$	odwracalny	nie
$12n_{162}$	1..2	5	3	61	0	$1+1+0-1$	odwracalny	nie
$12n_{163}$	3	5	3	47	-6	$1+4+2-3-1$	odwracalny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{164}$	2	5	3	85	0	$1+3+2-1$	odwracalny	nie
$12n_{165}$	1	5	3	67	-2	$1+1+0+1$	odwracalny	nie
$12n_{166}$	4	4	3	41	-8	$1+10+21+12+2$	odwracalny	nie
$12n_{167}$	1..3	4	3	67	2	$1+5+9+3$	odwracalny	nie
$12n_{168}$	2	4	3	37	-4	$1+3-1-1$	odwracalny	nie
$12n_{169}$	3..4	5	3	51	-6	$1+9+15+4$	odwracalny	nie
$12n_{170}$	1..2	5	3	81	0	$1+4+6$	odwracalny	nie
$12n_{171}$	2	5	3	39	-2	$1+2-2$	odwracalny	nie
$12n_{172}$	3	5	3	23	-6	$1+6+4-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{173}$	2	5	3	123	-2	$1-1+0-2-1$	chiralny	nie
$12n_{174}$	2	5	3	165	0	$1-1+2+2+1$	chiralny	nie
$12n_{175}$	2	5	3	3	-2	$1+1+0+4+1$	chiralny	nie
$12n_{176}$	1..2	5	3	63	-2	$1+0-4$	chiralny	nie
$12n_{177}$	3	5	3	79	-6	$1+8+13+4$	chiralny	nie
$12n_{178}$	1..2	5	3	101	0	$1+3+3-1$	chiralny	nie
$12n_{179}$	2	5	3	13	-4	$1+1-3-1$	chiralny	nie
$12n_{180}$	1..2	4	3	97	0	$1+0-2-2$	chiralny	nie
$12n_{181}$	1..2	4	3	83	-2	$1+1+3+2$	chiralny	nie
$12n_{182}$	1..2	5	3	71	-2	$1+2+0-3-1$	chiralny	nie
$12n_{183}$	2	5	3	109	-4	$1+5+4-1$	chiralny	nie
$12n_{184}$	1..2	5	3	43	2	$1+3+2+1$	chiralny	nie
$12n_{185}$	3	4	3	55	-6	$1+2-3-4-1$	chiralny	nie
$12n_{186}$	2..3	4	3	89	4	$1+6+7+4+1$	chiralny	nie
$12n_{187}$	4	4	3	47	-6	$1+8+15+8+1$	chiralny	nie
$12n_{188}$	2	4	3	65	-4	$1+4+5+4+1$	chiralny	nie
$12n_{189}$	1..2	4	3	79	-2	$1+0-5-4-1$	chiralny	nie
$12n_{190}$	2..3	3	3	65	4	$1+8+10+5+1$	chiralny	nie
$12n_{191}$	3	3	3	79	-6	$1+4+0-3-1$	chiralny	nie
$12n_{192}$	1..3	4	3	23	2	$1+6+12+7+1$	chiralny	nie
$12n_{193}$	2..3	4	3	59	2	$1+7+6+2$	chiralny	nie
$12n_{194}$	2	4	3	85	-4	$1+3-2-2$	chiralny	nie
$12n_{195}$	1..2	5	3	19	2	$1+5+8+2$	chiralny	nie
$12n_{196}$	2..3	5	3	37	-4	$1-1-6-2$	chiralny	nie
$12n_{197}$	1..2	5	3	107	-2	$1+3+2+2$	chiralny	nie
$12n_{198}$	1	5	3	27	-2	$1-1+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{199}$	2	4	3	11	2	$1+7+5+1$	odwracalny	nie
$12n_{200}$	2	5	3	9	0	$1+6+2$	odwracalny	nie
$12n_{201}$	2	5	3	105	-4	$1+2-5-3$	chiralny	nie
$12n_{202}$	2..3	5	3	135	2	$1+6+5+3$	chiralny	nie
$12n_{203}$	3..4	5	3	15	-6	$1+8+13+3$	chiralny	nie
$12n_{204}$	2..3	5	3	93	-4	$1+5+3-1$	odwracalny	nie
$12n_{205}$	2	5	3	77	-4	$1+1+1+3+1$	chiralny	nie
$12n_{206}$	2	5	3	115	2	$1+1-3-3-1$	chiralny	nie
$12n_{207}$	3	5	3	37	-4	$1+3-1-5-1$	odwracalny	nie
$12n_{208}$	2..3	4	3	103	2	$1+6+7+3$	chiralny	nie
$12n_{209}$	2	4	3	137	-4	$1+2-3-3$	chiralny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{210}$	1..2	5	3	1	0	$1+4+5+1$	chiralny	nie
$12n_{211}$	2	5	3	51	-2	$1-3+0+1$	odwracalny	nie
$12n_{212}$	2..3	4	3	103	2	$1+6+7+3$	chiralny	nie
$12n_{213}$	2	4	3	137	-4	$1+2-3-3$	chiralny	nie
$12n_{214}$	1..2	5	3	1	0	$1+4+5+1$	chiralny	nie
$12n_{215}$	2	5	3	61	-4	$1+1-4-2$	chiralny	nie
$12n_{216}$	1..3	5	3	83	2	$1+5+4+2$	chiralny	nie
$12n_{217}$	3	5	3	5	-4	$1+7+10+2$	chiralny	nie
$12n_{218}$	1	5	3	29	0	$1+1-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{219}$	2	5	4	99	-2	$1+1-2-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{220}$	3	5	4	21	-4	$1+3-2-5-1$	odwracalny	nie
$12n_{221}$	2	5	4	9	0	$1+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{222}$	2	5	4	129	-4	$1+4+1-2$	odwracalny	nie
$12n_{223}$	2	5	4	111	-2	$1+0+1+2$	odwracalny	nie
$12n_{224}$	2	5	4	81	0	$1+0-3-2$	odwracalny	nie
$12n_{225}$	2	5	4	39	-2	$1-2-3$	odwracalny	nie
$12n_{226}$	2	5	3	77	-4	$1+1+1+3+1$	chiralny	nie
$12n_{227}$	2	5	3	115	2	$1+1-3-3-1$	chiralny	nie
$12n_{228}$	3	5	3	37	-4	$1+3-1-5-1$	odwracalny	nie
$12n_{229}$	3	5	4	51	-6	$1+5+2-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{230}$	1..2	6	3	19	-2	$1-3+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{231}$	1	5	3	31	2	$1+0-2$	chiralny	nie
$12n_{232}$	1	5	3	31	2	$1+0-2$	chiralny	nie
$12n_{233}$	2..3	3	3	29	4	$1+9+12+6+1$	odwracalny	nie
$12n_{234}$	3	3	3	43	-6	$1+3-2-4-1$	odwracalny	nie
$12n_{235}$	2..3	3	3	13	4	$1+5+10+6+1$	odwracalny	nie
$12n_{236}$	2..3	4	3	47	2	$1+8+7+2$	odwracalny	nie
$12n_{237}$	2	4	3	73	-4	$1+2-3-2$	odwracalny	nie
$12n_{238}$	1..2	4	3	31	2	$1+4+7+2$	odwracalny	nie
$12n_{239}$	2..3	4	3	43	2	$1+7+7+2$	odwracalny	nie
$12n_{240}$	2	4	3	77	-4	$1+1-3-2$	odwracalny	nie
$12n_{241}$	1..2	4	3	59	2	$1+3+5+2$	odwracalny	nie
$12n_{242}$	5	3	3	1	-8	$1+12+31+27+9+1$	odwracalny	nie
$12n_{243}$	4	4	3	5	-8	$1+11+23+13+2$	odwracalny	nie
$12n_{244}$	4	4	3	25	-8	$1+10+20+12+2$	odwracalny	nie
$12n_{245}$	3..4	5	3	39	-6	$1+10+16+4$	odwracalny	nie
$12n_{246}$	1..2	5	3	69	0	$1+3+5$	odwracalny	nie
$12n_{247}$	2	5	3	51	-2	$1+1-3$	odwracalny	nie
$12n_{248}$	2..3	5	3	25	0	$1+6+3$	odwracalny	nie
$12n_{249}$	1	5	3	47	-2	$1+0-3$	odwracalny	nie
$12n_{250}$	1	5	3	41	0	$1+2+3$	odwracalny	nie
$12n_{251}$	3	5	3	19	-6	$1+9+13+3$	odwracalny	nie
$12n_{252}$	1	5	3	89	0	$1+2-2-2$	chiralny	nie
$12n_{253}$	2..3	4	3	55	2	$1+6+6+2$	chiralny	nie
$12n_{254}$	2	4	3	65	-4	$1+0-4-2$	chiralny	nie
$12n_{255}$	1	5	3	127	-2	$1+0+0+2$	chiralny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{256}$	2	5	3	25	0	$1+2+2$	chiralny	nie
$12n_{257}$	2	4	3	25	0	$1+2+2$	chiralny	nie
$12n_{258}$	1..2	5	3	15	-2	$1+0-1$	odwracalny	nie
$12n_{259}$	3..4	4	3	95	-6	$1+8+12+4$	chiralny	nie
$12n_{260}$	2..3	5	3	21	0	$1+7+3$	odwracalny	nie
$12n_{261}$	2	5	4	69	-4	$1-1+0+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{262}$	1	5	3	89	0	$1+2-2-2$	chiralny	nie
$12n_{263}$	1	5	3	127	-2	$1+0+0+2$	chiralny	nie
$12n_{264}$	2	5	3	25	0	$1+2+2$	chiralny	nie
$12n_{265}$	1..2	5	3	63	-2	$1+0+4+2$	chiralny	nie
$12n_{266}$	2	5	3	105	0	$1-2-2-2$	chiralny	nie
$12n_{267}$	2	5	3	63	-2	$1+0-4$	chiralny	nie
$12n_{268}$	2	6	3	9	0	$1-2$	chiralny	nie
$12n_{269}$	2	5	3	117	0	$1-1+3-1$	odwracalny	nie
$12n_{270}$	2..3	5	3	63	2	$1+4-3$	odwracalny	nie
$12n_{271}$	1	5	3	53	0	$1-1-1-1$	odwracalny	nie
$12n_{272}$	1	5	3	83	2	$1+1-1+1$	odwracalny	nie
$12n_{273}$	2	5	3	5	-4	$1+3-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{274}$	2	5	3	55	-2	$1+2-3$	odwracalny	nie
$12n_{275}$	1	5	3	37	0	$1-1+2$	chiralny	nie
$12n_{276}$	3	4	3	25	4	$1+6+7+1$	odwracalny	nie
$12n_{277}$	1	4	3	67	-2	$1+1+4+2$	chiralny	nie
$12n_{278}$	2	5	3	65	0	$1+0+4$	chiralny	nie
$12n_{279}$	1	5	3	25	0	$1-2+1$	odwracalny	nie
$12n_{280}$	1..2	5	3	51	-2	$1-3+0+1$	odwracalny	nie
$12n_{281}$	1..2	5	3	77	0	$1-3+0-1$	chiralny	nie
$12n_{282}$	1..2	5	3	21	0	$1-1+1$	odwracalny	nie
$12n_{283}$	2	5	3	87	-2	$1-2+2-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{284}$	1..2	4	3	57	0	$1-2-1-1$	odwracalny	nie
$12n_{285}$	1..2	5	3	39	-2	$1-2+1+1$	odwracalny	nie
$12n_{286}$	1..2	5	3	45	0	$1-3+2$	chiralny	nie
$12n_{287}$	1..2	5	3	111	2	$1+0+1-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{288}$	1..2	5	3	49	0	$1+4+4$	odwracalny	nie
$12n_{289}$	3	5	3	91	-6	$1+7+12+4$	odwracalny	nie
$12n_{290}$	2	4	3	69	-4	$1+3+1-1$	chiralny	nie
$12n_{291}$	1..3	4	3	99	2	$1+5+7+3$	chiralny	nie
$12n_{292}$	4	4	3	1	-8	$1+8+18+12+2$	chiralny	nie
$12n_{293}$	2	4	3	7	-2	$1+2$	odwracalny	nie
$12n_{294}$	2..3	5	3	45	-4	$1-3-2+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{295}$	1..2	5	3	107	2	$1-1-3+1$	odwracalny	nie
$12n_{296}$	2	5	3	37	-4	$1-1-2+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{297}$	2	6	3	95	-2	$1-4+1+2$	odwracalny	nie
$12n_{298}$	1..2	5	3	89	0	$1-2+1-1$	chiralny	nie
$12n_{299}$	2	5	3	85	-4	$1+3-6-3$	odwracalny	nie
$12n_{300}$	1	5	3	77	0	$1+1+1-1$	odwracalny	nie
$12n_{301}$	1..2	5	3	67	-2	$1+1+0-3-1$	odwracalny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{302}$	1..2	5	3	111	-2	$1+0-3+1$	odwracalny	nie
$12n_{303}$	2	4	3	41	-4	$1+2-1-1$	odwracalny	nie
$12n_{304}$	1..3	4	3	71	2	$1+6+9+3$	odwracalny	nie
$12n_{305}$	4	4	3	29	-8	$1+9+20+12+2$	odwracalny	nie
$12n_{306}$	1	5	3	35	-2	$1+1-2$	odwracalny	nie
$12n_{307}$	1..3	5	3	77	0	$1+5+6$	odwracalny	nie
$12n_{308}$	3	5	3	63	-6	$1+8+14+4$	odwracalny	nie
$12n_{309}$	1..2	4	3	1	0	$1+4+5+1$	odwracalny	nie
$12n_{310}$	1	5	3	21	0	$1+3+2$	odwracalny	nie
$12n_{311}$	1	5	3	51	2	$1+1-3$	odwracalny	nie
$12n_{312}$	1..2	5	3	49	0	$1+0-1-1$	chiralny	nie
$12n_{313}$	1	5	3	1	0	1	chiralny	nie
$12n_{314}$	1..2	4	3	55	2	$1-2+0+1$	odwracalny	nie
$12n_{315}$	1..2	4	3	61	0	$1+1+0-1$	chiralny	nie
$12n_{316}$	2	4	3	65	-4	$1+4+1-1$	chiralny	nie
$12n_{317}$	2	4	3	85	0	$1-1-3-2$	chiralny	nie
$12n_{318}$	1..2	4	3	1	0	$1+4+5+1$	chiralny	nie
$12n_{319}$	2	4	3	41	-4	$1-2-6-2$	chiralny	nie
$12n_{320}$	1	4	3	109	0	$1+1-1-2$	chiralny	nie
$12n_{321}$	2	4	3	11	-2	$1+3$	odwracalny	nie
$12n_{322}$	1	5	3	23	-2	$1-2-2$	chiralny	nie
$12n_{323}$	1..2	4	3	53	0	$1+3+4$	chiralny	nie
$12n_{324}$	1..2	5	3	67	-2	$1-3-5$	chiralny	nie
$12n_{325}$	1	4	3	113	0	$1+0-1-2$	chiralny	nie
$12n_{326}$	2	4	3	53	-4	$1+3+4+4+1$	chiralny	nie
$12n_{327}$	2	4	3	61	4	$1+5+5+4+1$	chiralny	nie
$12n_{328}$	4	4	3	19	-6	$1+9+17+8+1$	odwracalny	nie
$12n_{329}$	3	4	3	21	4	$1+7+7+1$	odwracalny	nie
$12n_{330}$	1..2	4	3	87	-2	$1+2+3+2$	odwracalny	nie
$12n_{331}$	2	5	3	45	4	$1+1-5-2$	chiralny	nie
$12n_{332}$	2	5	3	9	4	$1+6+2$	odwracalny	nie
$12n_{333}$	2	5	3	45	0	$1+1+3$	odwracalny	nie
$12n_{334}$	2	5	3	63	2	$1+0-4$	chiralny	nie
$12n_{335}$	2	4	3	95	-2	$1+0+2+2$	chiralny	nie
$12n_{336}$	2	5	3	5	4	$1-1-4-1$	chiralny	nie
$12n_{337}$	1..2	5	3	103	2	$1-2-3+1$	chiralny	nie
$12n_{338}$	4	4	3	25	-8	$1+10+20+12+2$	odwracalny	nie
$12n_{339}$	2	4	3	95	-2	$1+4+7+3$	odwracalny	nie
$12n_{340}$	1	4	3	17	0	$1+0-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{341}$	3	5	3	67	-6	$1+9+14+4$	odwracalny	nie
$12n_{342}$	1	5	3	53	0	$1+3+4$	odwracalny	nie
$12n_{343}$	1	5	3	59	-2	$1-1-4$	odwracalny	nie
$12n_{344}$	2	3	3	77	4	$1+5+6+4+1$	chiralny	nie
$12n_{345}$	1..2	3	3	67	-2	$1+1-4-4-1$	chiralny	nie
$12n_{346}$	1..2	4	3	13	0	$1+5+10+6+1$	chiralny	nie
$12n_{347}$	1	4	3	31	2	$1+4+3+1$	odwracalny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{348}$	1..2	5	3	79	2	$1+0-1+1$	chiralny	nie
$12n_{349}$	2	5	3	13	4	$1+5-2-1$	chiralny	nie
$12n_{350}$	1	5	3	103	2	$1+2-2+1$	chiralny	nie
$12n_{351}$	1..2	5	3	31	−2	$1-4+1+1$	chiralny	nie
$12n_{352}$	1	5	3	7	−2	$1-2+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{353}$	1..2	5	3	103	2	$1-2-3+1$	chiralny	nie
$12n_{354}$	1..2	5	3	23	2	$1-2+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{355}$	2	5	3	11	2	$1-1+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{356}$	2	5	3	61	0	$1-3-1-1$	-zwierciadlany	nie
$12n_{357}$	2	5	3	99	−2	$1-3-3+1$	chiralny	nie
$12n_{358}$	1	4	3	43	2	$1-1-3$	chiralny	nie
$12n_{359}$	1..2	6	3	69	0	$1-5+3$	chiralny	nie
$12n_{360}$	1	5	3	49	0	$1+0+3$	chiralny	nie
$12n_{361}$	2..3	5	3	73	−4	$1+2-7-3$	chiralny	nie
$12n_{362}$	1	4	3	31	2	$1+0+2+1$	chiralny	nie
$12n_{363}$	1..2	5	3	87	2	$1-2-2+1$	chiralny	nie
$12n_{364}$	2	5	3	99	−2	$1-3+1+2$	chiralny	nie
$12n_{365}$	2	5	3	99	2	$1-3+1+2$	chiralny	nie
$12n_{366}$	3	4	3	29	4	$1+9+8+1$	chiralny	nie
$12n_{367}$	1..2	5	3	125	0	$1+1+4-1$	chiralny	nie
$12n_{368}$	3	4	3	27	−6	$1+3-1-4-1$	chiralny	nie
$12n_{369}$	1	4	3	75	−2	$1-1-5-4-1$	chiralny	nie
$12n_{370}$	1	4	3	5	0	$1-1-4-1$	odwracalny	nie
$12n_{371}$	1	4	3	11	−2	$1+3+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{372}$	1	4	3	43	−2	$1+3+2+1$	chiralny	nie
$12n_{373}$	2	4	3	77	−4	$1+5+2-1$	odwracalny	nie
$12n_{374}$	4	4	3	11	−6	$1+11+22+13+2$	odwracalny	nie
$12n_{375}$	2	4	3	57	−4	$1+2+0-1$	odwracalny	nie
$12n_{376}$	1..2	4	3	91	−2	$1-1-6-4-1$	chiralny	nie
$12n_{377}$	1..2	4	3	39	2	$1+2+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{378}$	1..2	4	3	107	2	$1+3+6+3$	chiralny	nie
$12n_{379}$	2	4	3	63	2	$1+4+5+2$	odwracalny	nie
$12n_{380}$	2	4	3	81	0	$1+0-3-2$	odwracalny	nie
$12n_{381}$	1	5	3	59	−2	$1+3-3$	chiralny	nie
$12n_{382}$	1..2	5	3	19	−2	$1+1-1$	chiralny	nie
$12n_{383}$	1..2	5	3	51	−2	$1+1-3$	odwracalny	nie
$12n_{384}$	2	5	3	113	−4	$1+0-5-3$	chiralny	nie
$12n_{385}$	1..2	4	3	73	0	$1+2+1-1$	chiralny	nie
$12n_{386}$	4	4	3	9	−8	$1+10+19+12+2$	odwracalny	nie
$12n_{387}$	3	5	3	27	−6	$1+7+4-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{388}$	2	5	3	45	0	$1+1-1-1$	odwracalny	nie
$12n_{389}$	2	5	3	99	−2	$1-3-3+1$	odwracalny	nie
$12n_{390}$	1..2	4	3	59	−2	$1-1+0+1$	chiralny	nie
$12n_{391}$	2	5	3	115	2	$1+5+6+3$	odwracalny	nie
$12n_{392}$	1	5	3	99	−2	$1+1-2+1$	odwracalny	nie
$12n_{393}$	2	5	3	49	0	$1+0+3$	chiralny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{394}$	2	5	3	25	0	$1-2+1$	odwracalny	nie
$12n_{395}$	2	5	3	77	4	$1+5+2-1$	odwracalny	nie
$12n_{396}$	1..2	5	3	67	2	$1-3-1+1$	chiralny	nie
$12n_{397}$	2	5	3	49	0	$1+0-1-1$	odwracalny	nie
$12n_{398}$	2	5	3	21	4	$1+3-2-1$	chiralny	nie
$12n_{399}$	1..2	5	3	81	0	$1+0+1-1$	chiralny	nie
$12n_{400}$	1	5	3	95	2	$1+0-2+1$	chiralny	nie
$12n_{401}$	2	5	3	87	-2	$1+2-1+1$	chiralny	nie
$12n_{402}$	3	4	3	9	4	$1+10+7+1$	odwracalny	nie
$12n_{403}$	2	4	3	9	4	$1+2-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{404}$	2..3	5	3	3	2	$1+9+2$	odwracalny	nie
$12n_{405}$	2	5	3	73	-4	$1+2-3+2+1$	chiralny	nie
$12n_{406}$	3..4	5	3	83	-6	$1+9+17+5$	chiralny	nie
$12n_{407}$	2	4	3	37	-4	$1+3-1-1$	chiralny	nie
$12n_{408}$	1..2	5	3	101	0	$1+3+3-1$	chiralny	nie
$12n_{409}$	2	4	3	39	2	$1+6+3+1$	chiralny	nie
$12n_{410}$	2	5	3	111	-2	$1+4+2+2$	chiralny	nie
$12n_{411}$	1..2	5	3	19	2	$1+5$	odwracalny	nie
$12n_{412}$	1	4	3	75	2	$1+3+4+2$	chiralny	nie
$12n_{413}$	2	4	3	75	-2	$1+3+4+2$	chiralny	nie
$12n_{414}$	2	5	3	25	0	$1+2+2$	odwracalny	nie
$12n_{415}$	1..2	4	3	103	-2	$1+2+2+2$	chiralny	nie
$12n_{416}$	2..3	4	3	77	-4	$1+5+6+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{417}$	4	3	3	35	-6	$1+9+16+8+1$	odwracalny	nie
$12n_{418}$	3	4	3	19	-6	$1+5+0-4-1$	chiralny	nie
$12n_{419}$	3	4	3	3	-6	$1+5+1-4-1$	chiralny	nie
$12n_{420}$	2	5	3	81	0	$1+0+1-1$	odwracalny	nie
$12n_{421}$	1..2	5	3	117	0	$1-1-1-2$	chiralny	nie
$12n_{422}$	1..2	5	3	117	0	$1-1-1-2$	chiralny	nie
$12n_{423}$	2	5	3	15	2	$1+0+3+1$	chiralny	nie
$12n_{424}$	1	4	3	95	-2	$1+0-2-3-1$	chiralny	nie
$12n_{425}$	2	4	3	33	4	$1+4+3+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{426}$	4	4	3	15	-6	$1+8+17+8+1$	odwracalny	nie
$12n_{427}$	2	4	3	113	-4	$1+4+4+3+1$	chiralny	nie
$12n_{428}$	3	4	3	31	-6	$1+4-1-4-1$	chiralny	nie
$12n_{429}$	1	5	3	71	2	$1+2-4$	chiralny	nie
$12n_{430}$	1	5	3	1	0	1	chiralny	nie
$12n_{431}$	1..2	5	3	101	0	$1-1+2-1$	chiralny	nie
$12n_{432}$	2..3	5	3	17	4	$1+8+3$	odwracalny	nie
$12n_{433}$	2	5	3	11	2	$1+3-4-1$	odwracalny	nie
$12n_{434}$	1	5	3	65	0	$1+0+0-1$	chiralny	nie
$12n_{435}$	1	5	3	57	0	$1+2+0-1$	chiralny	nie
$12n_{436}$	2	5	3	29	4	$1+5-1-1$	odwracalny	nie
$12n_{437}$	1..2	5	3	29	0	$1+5+7+1$	chiralny	nie
$12n_{438}$	2	4	3	21	-4	$1-1-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{439}$	1..3	4	3	3	2	$1+5+5+1$	odwracalny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{440}$	2	4	3	81	0	$1+0-3-2$	chiralny	nie
$12n_{441}$	2..3	4	3	93	-4	$1+5+3-1$	odwracalny	nie
$12n_{442}$	2	5	3	39	-2	$1-2-3$	odwracalny	nie
$12n_{443}$	1..3	4	3	33	0	$1+4+3$	odwracalny	nie
$12n_{444}$	1..2	5	3	27	-2	$1-1-2$	chiralny	nie
$12n_{445}$	2	5	3	129	-4	$1+4+1-2$	odwracalny	nie
$12n_{446}$	1	5	3	7	-2	$1+2-4-1$	odwracalny	nie
$12n_{447}$	1	4	3	73	0	$1-2-4-2$	chiralny	nie
$12n_{448}$	1..2	5	3	109	0	$1-3-2+2+1$	chiralny	nie
$12n_{449}$	1..2	5	3	35	-2	$1+1+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{450}$	1	5	3	95	-2	$1+0-2+1$	odwracalny	nie
$12n_{451}$	2	4	3	35	2	$1+5+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{452}$	1..2	4	3	55	-2	$1-2-4$	odwracalny	nie
$12n_{453}$	3..4	5	3	115	-6	$1+9+15+5$	odwracalny	nie
$12n_{454}$	1..3	4	3	47	2	$1+4+2+1$	chiralny	nie
$12n_{455}$	2	4	3	97	-4	$1+0-6-3$	chiralny	nie
$12n_{456}$	1..2	5	3	17	0	$1+4+6+1$	chiralny	nie
$12n_{457}$	1..2	5	3	11	2	$1+3$	odwracalny	nie
$12n_{458}$	1..2	5	3	129	0	$1+0+0+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{459}$	2	5	3	105	-4	$1+2-1+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{460}$	2	5	3	63	2	$1+0+0+1$	odwracalny	nie
$12n_{461}$	1	5	3	85	0	$1-1+1-1$	chiralny	nie
$12n_{462}$	2	5	3	25	0	$1-2+1$	-zwierciadlany	nie
$12n_{463}$	1..2	5	3	77	0	$1+1+1-1$	chiralny	nie
$12n_{464}$	1	4	3	15	-2	$1+0-1$	odwracalny	nie
$12n_{465}$	1..2	5	3	83	-2	$1+1+3-2-1$	chiralny	nie
$12n_{466}$	2	3	3	53	4	$1+7+9+5+1$	odwracalny	nie
$12n_{467}$	1	3	3	43	-2	$1-1-7-5-1$	odwracalny	nie
$12n_{468}$	1	3	3	37	0	$1+3+7+5+1$	odwracalny	nie
$12n_{469}$	2	4	3	55	2	$1+6+6+2$	odwracalny	nie
$12n_{470}$	1..2	4	3	41	0	$1-2-6-2$	odwracalny	nie
$12n_{471}$	1..2	4	3	71	-2	$1+2+4+2$	odwracalny	nie
$12n_{472}$	5	3	3	13	-8	$1+13+32+27+9+1$	odwracalny	nie
$12n_{473}$	4	4	3	1	-8	$1+12+23+13+2$	odwracalny	nie
$12n_{474}$	4	4	3	17	-8	$1+12+24+13+2$	odwracalny	nie
$12n_{475}$	1..2	4	3	7	2	$1+2+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{476}$	2	4	3	73	-4	$1-2-8-3$	odwracalny	nie
$12n_{477}$	3..4	5	3	43	-6	$1+11+16+4$	odwracalny	nie
$12n_{478}$	1..2	5	3	29	0	$1+1+2$	odwracalny	nie
$12n_{479}$	1..2	5	3	83	-2	$1-3-6$	odwracalny	nie
$12n_{480}$	2	5	3	81	0	$1-4+0-1$	odwracalny	nie
$12n_{481}$	2	5	3	65	0	$1-4-1-1$	odwracalny	nie
$12n_{482}$	1	4	3	65	0	$1+0+0-1$	odwracalny	nie
$12n_{483}$	1	4	3	15	-2	$1+0-1$	odwracalny	nie
$12n_{484}$	1	4	3	51	-2	$1+1+1+1$	chiralny	nie
$12n_{485}$	1	4	3	71	-2	$1+2+4+2$	chiralny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{486}$	2	4	3	55	2	$1+2+5+2$	odwracalny	nie
$12n_{487}$	1	4	3	11	-2	$1-1-5-1$	odwracalny	nie
$12n_{488}$	1	4	3	5	0	$1+3+5+1$	odwracalny	nie
$12n_{489}$	1..2	5	3	119	-2	$1+2+1+2$	odwracalny	nie
$12n_{490}$	1..2	5	3	77	0	$1+1+5$	odwracalny	nie
$12n_{491}$	1..2	5	3	69	0	$1+3+1-1$	chiralny	nie
$12n_{492}$	1	4	3	89	0	$1-2-3-2$	chiralny	nie
$12n_{493}$	1	4	3	93	0	$1-3-3-2$	chiralny	nie
$12n_{494}$	3	5	3	45	-4	$1-3-2+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{495}$	2	5	3	27	2	$1+3+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{496}$	3	5	3	117	-4	$1+7+5-1$	odwracalny	nie
$12n_{497}$	2	5	3	105	0	$1+2+3-1$	odwracalny	nie
$12n_{498}$	2	5	3	79	-2	$1+0-5$	chiralny	nie
$12n_{499}$	1	5	3	45	0	$1+1-1-1$	odwracalny	nie
$12n_{500}$	1..2	4	3	51	2	$1+5+6+2$	odwracalny	nie
$12n_{501}$	1..2	5	3	49	0	$1+4+4$	odwracalny	nie
$12n_{502}$	4	4	3	9	-8	$1+10+23+13+2$	odwracalny	nie
$12n_{503}$	3	5	3	35	-6	$1+9+16+4$	odwracalny	nie
$12n_{504}$	1	5	3	121	0	$1-2-1+2+1$	chiralny	nie
$12n_{505}$	2	5	3	99	2	$1+1-2+1$	odwracalny	nie
$12n_{506}$	1..2	5	3	59	-2	$1-1+0+1$	chiralny	nie
$12n_{507}$	1..2	5	3	75	2	$1-1-1+1$	chiralny	nie
$12n_{508}$	2	4	3	81	-4	$1+4+6+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{509}$	2..3	5	3	49	-4	$1-4-2+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{510}$	2	5	3	121	4	$1+6+5-1$	odwracalny	nie
$12n_{511}$	1	4	3	85	0	$1-1-3-2$	odwracalny	nie
$12n_{512}$	2	4	3	67	2	$1+5+5+2$	chiralny	nie
$12n_{513}$	2	4	3	125	-4	$1+5+1-2$	chiralny	nie
$12n_{514}$	1..2	4	3	35	2	$1+5+3+1$	chiralny	nie
$12n_{515}$	2	5	3	89	-4	$1+2-2-2$	chiralny	nie
$12n_{516}$	2	5	3	97	-4	$1+4-1-2$	chiralny	nie
$12n_{517}$	1..2	4	3	101	0	$1+3+7+4+1$	chiralny	nie
$12n_{518}$	4	4	3	63	-6	$1+8+14+8+1$	odwracalny	nie
$12n_{519}$	1..2	5	3	7	2	$1+2$	odwracalny	nie
$12n_{520}$	1..2	5	3	71	2	$1+2-4$	chiralny	nie
$12n_{521}$	1..2	5	3	95	-2	$1+0+2-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{522}$	1..3	4	3	23	2	$1+6+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{523}$	1..2	5	3	13	0	$1+5+2$	odwracalny	nie
$12n_{524}$	1..3	6	3	91	-2	$1-5+1+2$	odwracalny	nie
$12n_{525}$	1..2	6	3	117	0	$1-5+2-1$	odwracalny	nie
$12n_{526}$	2	4	3	29	-4	$1+1+2+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{527}$	2..3	5	3	93	-4	$1+1-6-3$	odwracalny	nie
$12n_{528}$	3	4	3	37	4	$1+7+8+1$	chiralny	nie
$12n_{529}$	1..2	5	3	115	-2	$1-3-4+1$	chiralny	nie
$12n_{530}$	1..2	5	3	83	-2	$1-3+2+2$	chiralny	nie
$12n_{531}$	1..3	4	3	97	0	$1+4+7+4+1$	chiralny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{532}$	1..2	5	3	125	0	$1-3-1-2$	chiralny	nie
$12n_{533}$	2	4	3	63	-2	$1+0-4-4-1$	odwracalny	nie
$12n_{534}$	1	4	3	109	0	$1+1-1-2$	chiralny	nie
$12n_{535}$	1	5	3	27	2	$1+3-1$	odwracalny	nie
$12n_{536}$	1	4	3	81	0	$1+0+1-1$	chiralny	nie
$12n_{537}$	1..2	5	3	115	-2	$1-3+0+2$	odwracalny	nie
$12n_{538}$	2	4	3	65	-4	$1+0+0+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{539}$	1..2	4	3	127	-2	$1+0-4-3-1$	chiralny	nie
$12n_{540}$	2	4	3	91	-2	$1-1+2+2$	chiralny	nie
$12n_{541}$	1..2	4	3	83	2	$1+1+3+2$	chiralny	nie
$12n_{542}$	1..2	5	3	115	2	$1+1-3+1$	odwracalny	nie
$12n_{543}$	2	4	3	63	2	$1+4+1+1$	odwracalny	nie
$12n_{544}$	1..2	4	3	119	-2	$1-2+0+2$	odwracalny	nie
$12n_{545}$	2	5	3	85	-4	$1+3-2-2$	chiralny	nie
$12n_{546}$	2	4	3	63	2	$1+0+4+2$	odwracalny	nie
$12n_{547}$	1	5	3	69	0	$1-1+4$	odwracalny	nie
$12n_{548}$	1..2	4	3	85	0	$1+3+2-1$	odwracalny	nie
$12n_{549}$	2	4	3	27	-2	$1+3+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{550}$	1..2	5	3	33	0	$1+0+2$	odwracalny	nie
$12n_{551}$	2	5	3	105	-4	$1+2-5-3$	odwracalny	nie
$12n_{552}$	1	5	3	9	0	$1+2-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{553}$	3	5	4	81	0	$1-4+4$	odwracalny	nie
$12n_{554}$	3	6	4	27	2	$1-1-2$	odwracalny	nie
$12n_{555}$	3	5	4	135	2	$1+6-3+1$	odwracalny	nie
$12n_{556}$	3	5	4	81	0	$1-4+4$	odwracalny	nie
$12n_{557}$	2..3	5	3	97	-4	$1+0-6-3$	chiralny	nie
$12n_{558}$	2	5	3	35	-2	$1+5+3+1$	chiralny	nie
$12n_{559}$	2	4	3	53	-4	$1-1-5-2$	chiralny	nie
$12n_{560}$	1	4	3	133	0	$1-1-4-3$	chiralny	nie
$12n_{561}$	2	5	3	55	-2	$1-2-4$	chiralny	nie
$12n_{562}$	2	5	3	35	-2	$1-3-3$	chiralny	nie
$12n_{563}$	1..2	5	3	71	-2	$1-2-5$	chiralny	nie
$12n_{564}$	1..2	5	3	39	2	$1+2-2$	odwracalny	nie
$12n_{565}$	2	4	3	45	4	$1+1-5-2$	chiralny	nie
$12n_{566}$	1	5	3	63	2	$1+0-4$	chiralny	nie
$12n_{567}$	2	4	3	117	0	$1-1-5-3$	chiralny	nie
$12n_{568}$	1..2	4	3	107	-2	$1+3+6+3$	chiralny	nie
$12n_{569}$	1..3	4	3	83	2	$1+5+8+3$	chiralny	nie
$12n_{570}$	2	3	3	45	4	$1+5+8+5+1$	odwracalny	nie
$12n_{571}$	2	3	3	27	2	$1-1-6-5-1$	odwracalny	nie
$12n_{572}$	1	4	3	63	2	$1+4+5+2$	odwracalny	nie
$12n_{573}$	1	4	3	57	0	$1-2-5-2$	odwracalny	nie
$12n_{574}$	5	3	3	9	-8	$1+14+32+27+9+1$	odwracalny	nie
$12n_{575}$	4	4	3	3	-6	$1+13+23+13+2$	odwracalny	nie
$12n_{576}$	4	4	3	33	-8	$1+12+21+12+2$	odwracalny	nie
$12n_{577}$	1..2	4	3	27	-2	$1+3+3+1$	odwracalny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{578}$	1..2	4	3	93	0	$1-3-7-3$	odwracalny	nie
$12n_{579}$	1	5	3	9	0	$1-2+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{580}$	2	5	3	65	0	$1+4+5$	odwracalny	nie
$12n_{581}$	3	5	3	27	-6	$1+11+13+3$	odwracalny	nie
$12n_{582}$	2	5	3	9	0	$1+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{583}$	2	5	3	63	-2	$1-4-5$	odwracalny	nie
$12n_{584}$	1	5	3	91	-2	$1-1-2+1$	chiralny	nie
$12n_{585}$	3	5	3	55	-6	$1+10+15+4$	odwracalny	nie
$12n_{586}$	1..2	5	3	101	0	$1-1+2-1$	chiralny	nie
$12n_{587}$	1..2	5	3	117	0	$1+3+4-1$	odwracalny	nie
$12n_{588}$	1	4	3	85	0	$1-1-3-2$	chiralny	nie
$12n_{589}$	2	4	3	113	-4	$1+4+0-2$	chiralny	nie
$12n_{590}$	3	4	3	23	-6	$1+6+0-4-1$	chiralny	nie
$12n_{591}$	4	4	3	7	-6	$1+10+18+8+1$	odwracalny	nie
$12n_{592}$	2	4	3	49	4	$1+4+4+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{593}$	2	5	3	61	-4	$1+5-3-2$	chiralny	nie
$12n_{594}$	3	4	3	13	-4	$1+9+11+2$	odwracalny	nie
$12n_{595}$	1..2	5	3	91	2	$1+3+3+2$	odwracalny	nie
$12n_{596}$	2	5	3	95	2	$1+4+7+3$	odwracalny	nie
$12n_{597}$	1..2	4	3	75	-2	$1+3+4+2$	chiralny	nie
$12n_{598}$	2	5	3	99	-2	$1+1-2+1$	odwracalny	nie
$12n_{599}$	1	4	3	55	-2	$1+2-3-4-1$	chiralny	nie
$12n_{600}$	3..4	5	3	63	-6	$1+12+15+4$	odwracalny	nie
$12n_{601}$	2	5	3	27	-2	$1+3+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{602}$	2	5	3	99	-2	$1-3-3+1$	odwracalny	nie
$12n_{603}$	3	4	3	15	-6	$1+4+0-4-1$	odwracalny	nie
$12n_{604}$	2	3	3	81	4	$1+4+6+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{605}$	2	4	3	9	0	$1-2-8-6-1$	odwracalny	nie
$12n_{606}$	2	4	3	79	2	$1+4+4+2$	chiralny	nie
$12n_{607}$	1..2	4	3	59	2	$1+3+5+2$	chiralny	nie
$12n_{608}$	1..2	5	3	41	0	$1+2+3$	chiralny	nie
$12n_{609}$	2	4	3	41	-4	$1+2+3+4+1$	chiralny	nie
$12n_{610}$	1	4	3	65	0	$1+0+4+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{611}$	2	5	3	75	-2	$1-1+3+2$	odwracalny	nie
$12n_{612}$	2	5	3	95	-2	$1-4-3+1$	odwracalny	nie
$12n_{613}$	1	5	3	117	0	$1-1-1+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{614}$	1	5	3	73	0	$1-2+0-1$	chiralny	nie
$12n_{615}$	2	5	3	99	-2	$1-3+1-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{616}$	1	5	3	65	0	$1+0+0-1$	chiralny	nie
$12n_{617}$	2	5	3	5	4	$1+3-3-1$	chiralny	nie
$12n_{618}$	1..2	5	3	107	-2	$1-1+1-2-1$	chiralny	nie
$12n_{619}$	2	5	3	85	4	$1+3-2+2+1$	chiralny	nie
$12n_{620}$	1	5	3	143	-2	$1+0-1+2$	chiralny	nie
$12n_{621}$	2	5	3	95	2	$1+4-1+1$	chiralny	nie
$12n_{622}$	2	5	3	99	-2	$1+1+2-2-1$	chiralny	nie
$12n_{623}$	2	5	3	53	-4	$1+3+0+3+1$	chiralny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{624}$	3	4	3	13	-4	$1+5-2-5-1$	odwracalny	nie
$12n_{625}$	1..2	5	3	91	2	$1-1-2-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{626}$	3	5	3	153	4	$1+6+3-2$	chiralny	nie
$12n_{627}$	1..2	4	3	117	0	$1+3+8+4+1$	chiralny	nie
$12n_{628}$	1	5	3	105	0	$1-2+2-1$	odwracalny	nie
$12n_{629}$	1..2	5	3	27	2	$1-1+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{630}$	2..3	5	3	15	-2	$1-4+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{631}$	1..3	5	3	81	0	$1-4+0-1$	chiralny	nie
$12n_{632}$	1..2	5	3	147	2	$1+1+3-1-1$	odwracalny	nie
$12n_{633}$	1	4	3	97	0	$1+0-2-2$	chiralny	nie
$12n_{634}$	1..2	5	3	47	-2	$1+0+1+1$	chiralny	nie
$12n_{635}$	1..2	5	3	157	0	$1-3-3+1+1$	chiralny	nie
$12n_{636}$	2	5	3	81	0	$1+0+1-1$	odwracalny	nie
$12n_{637}$	2	5	3	135	-2	$1-2-1+2$	odwracalny	nie
$12n_{638}$	3	4	3	15	-6	$1+8+9+2$	odwracalny	nie
$12n_{639}$	3	4	3	35	-6	$1+5-1-4-1$	odwracalny	nie
$12n_{640}$	4	3	3	27	-6	$1+11+17+8+1$	chiralny	nie
$12n_{641}$	2	4	3	69	4	$1+3+5+4+1$	chiralny	nie
$12n_{642}$	3..4	5	4	27	2	$1+11+1$	odwracalny	nie
$12n_{643}$	2	5	3	49	-4	$1+4-4-2$	odwracalny	nie
$12n_{644}$	3	4	3	7	-6	$1+10+10+2$	chiralny	nie
$12n_{645}$	1	5	3	71	2	$1+2+4+2$	chiralny	nie
$12n_{646}$	1	4	3	103	-2	$1+2-2-3-1$	chiralny	nie
$12n_{647}$	4	3	3	23	-6	$1+10+17+8+1$	chiralny	nie
$12n_{648}$	3	4	3	11	-6	$1+7+1-4-1$	chiralny	nie
$12n_{649}$	2	4	3	77	-4	$1+1+1+3+1$	chiralny	nie
$12n_{650}$	1	4	3	17	0	$1+0+1$	odwracalny	nie
$12n_{651}$	2	5	3	119	-2	$1+2+1+2$	odwracalny	nie
$12n_{652}$	2	4	3	139	-2	$1-1-5-3-1$	chiralny	nie
$12n_{653}$	3	4	3	39	-6	$1+6-1-4-1$	odwracalny	nie
$12n_{654}$	3	5	3	45	-4	$1+5-4-2$	odwracalny	nie
$12n_{655}$	3	4	3	3	-6	$1+9+10+2$	chiralny	nie
$12n_{656}$	1	5	3	99	2	$1+1+2+2$	chiralny	nie
$12n_{657}$	1..2	4	3	81	0	$1+0+5+4+1$	chiralny	nie
$12n_{658}$	2	4	3	89	-4	$1+2+2+3+1$	chiralny	nie
$12n_{659}$	2	5	3	73	-4	$1+6-2-2$	chiralny	nie
$12n_{660}$	3	4	3	45	4	$1+9+9+1$	odwracalny	nie
$12n_{661}$	2	5	3	29	-4	$1+1-6-2$	chiralny	nie
$12n_{662}$	1..2	5	3	59	-2	$1-1+4+2$	chiralny	nie
$12n_{663}$	1..2	5	3	115	-2	$1+1+1-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{664}$	1..2	5	3	165	0	$1-1-2+1+1$	odwracalny	nie
$12n_{665}$	2	5	3	39	2	$1+2-2$	chiralny	nie
$12n_{666}$	2	3	3	81	-4	$1+4+6+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{667}$	1	4	3	75	-2	$1+3+4+2$	odwracalny	nie
$12n_{668}$	2	4	3	105	-4	$1+2+3+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{669}$	2	5	3	99	-2	$1+1+2+2$	odwracalny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{670}$	1..3	4	3	25	0	$1+6+11+6+1$	chiralny	nie
$12n_{671}$	3	4	3	95	-6	$1+4+3-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{672}$	2	5	3	51	2	$1+5+2+1$	chiralny	nie
$12n_{673}$	1..3	4	3	5	0	$1+7+14+7+1$	chiralny	nie
$12n_{674}$	3	3	3	75	-6	$1+3+0-3-1$	chiralny	nie
$12n_{675}$	1..3	3	3	45	0	$1+5+8+5+1$	chiralny	nie
$12n_{676}$	1..3	5	3	9	0	$1+6+10+2$	chiralny	nie
$12n_{677}$	2	4	3	89	-4	$1+2-2-2$	chiralny	nie
$12n_{678}$	1..2	4	3	79	-2	$1+4+4+2$	chiralny	nie
$12n_{679}$	5	3	3	25	-8	$1+10+28+26+9+1$	chiralny	nie
$12n_{680}$	4	4	3	19	-6	$1+9+21+13+2$	chiralny	nie
$12n_{681}$	1..3	4	3	25	0	$1+6+11+6+1$	chiralny	nie
$12n_{682}$	3	4	3	95	-6	$1+4+3-2-1$	chiralny	nie
$12n_{683}$	2	3	3	89	4	$1+6+7+4+1$	chiralny	nie
$12n_{684}$	2	3	3	77	4	$1+5+6+4+1$	chiralny	nie
$12n_{685}$	2	4	3	79	2	$1+4+4+2$	chiralny	nie
$12n_{686}$	2	4	3	97	-4	$1+4+3+3+1$	chiralny	nie
$12n_{687}$	1	5	3	107	2	$1+3+2+2$	chiralny	nie
$12n_{688}$	5	3	3	37	-8	$1+11+29+26+9+1$	chiralny	nie
$12n_{689}$	4	4	3	7	-6	$1+10+22+13+2$	chiralny	nie
$12n_{690}$	1..2	5	3	45	0	$1+5+8+1$	chiralny	nie
$12n_{691}$	4	4	3	35	-6	$1+9+20+13+2$	odwracalny	nie
$12n_{692}$	4	4	3	35	-6	$1+9+20+13+2$	odwracalny	nie
$12n_{693}$	3	5	3	13	-4	$1+5+2-4-1$	chiralny	nie
$12n_{694}$	4	4	3	35	-6	$1+9+16+8+1$	chiralny	nie
$12n_{695}$	1..2	4	3	85	0	$1+3+6+4+1$	chiralny	nie
$12n_{696}$	3	5	3	13	-4	$1+5+2-4-1$	chiralny	nie
$12n_{697}$	2	5	3	21	-4	$1+3+2+4+1$	chiralny	nie
$12n_{698}$	2..3	4	3	109	4	$1+5+0-2$	chiralny	nie
$12n_{699}$	2	5	3	47	2	$1+4-2$	chiralny	nie
$12n_{700}$	2..3	4	3	93	4	$1+5-1-2$	odwracalny	nie
$12n_{701}$	2..3	5	3	63	2	$1+4-3$	odwracalny	nie
$12n_{702}$	1..2	4	3	121	0	$1+2+0-2$	chiralny	nie
$12n_{703}$	2	4	3	73	-4	$1+2+1+3+1$	chiralny	nie
$12n_{704}$	1	5	3	61	0	$1+1+4$	chiralny	nie
$12n_{705}$	1	5	3	109	0	$1+1+3-1$	chiralny	nie
$12n_{706}$	2	5	3	49	0	$1-4+2+4+1$	całkowicie	nie
$12n_{707}$	2..3	3	3	85	4	$1+7+7+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{708}$	1..2	3	3	49	0	$1+4+8+5+1$	chiralny	nie
$12n_{709}$	1	3	3	61	0	$1+1+4+4+1$	chiralny	nie
$12n_{710}$	1	4	3	95	-2	$1+0+2+2$	chiralny	nie
$12n_{711}$	1..2	4	3	113	0	$1+0+3+3+1$	chiralny	nie
$12n_{712}$	2	4	3	119	2	$1+2+5+3$	chiralny	nie
$12n_{713}$	2	4	3	91	2	$1+3+7+3$	chiralny	nie
$12n_{714}$	2	4	3	131	-2	$1+1+4+3$	chiralny	nie
$12n_{715}$	1	5	3	89	0	$1+2+6$	chiralny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{716}$	1..2	4	3	79	-2	$1+0+3+2$	chiralny	nie
$12n_{717}$	2	4	3	51	2	$1+5+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{718}$	1	4	3	55	2	$1+2+5+2$	odwracalny	nie
$12n_{719}$	1	4	3	55	-2	$1+2+1+1$	chiralny	nie
$12n_{720}$	2	5	3	101	-4	$1+3-1-2$	chiralny	nie
$12n_{721}$	1..3	3	3	25	0	$1+6+11+6+1$	odwracalny	nie
$12n_{722}$	3	3	3	55	-6	$1+2-3-4-1$	odwracalny	nie
$12n_{723}$	1..2	4	3	19	-2	$1+5+8+2$	odwracalny	nie
$12n_{724}$	2	4	3	61	-4	$1+1-4-2$	odwracalny	nie
$12n_{725}$	5	3	3	5	-8	$1+11+31+27+9+1$	odwracalny	nie
$12n_{726}$	2	5	3	63	-2	$1+0-4$	odwracalny	nie
$12n_{727}$	1	5	3	91	-2	$1-1+2+2$	chiralny	nie
$12n_{728}$	1..2	4	3	107	-2	$1-1-3-3-1$	chiralny	nie
$12n_{729}$	2	4	3	73	-4	$1+2-3-2$	chiralny	nie
$12n_{730}$	1..2	4	3	47	-2	$1+4+2+1$	chiralny	nie
$12n_{731}$	1..2	5	3	121	0	$1-2-1-2$	chiralny	nie
$12n_{732}$	1	5	3	115	-2	$1+1-3+1$	chiralny	nie
$12n_{733}$	1..2	5	3	131	-2	$1+1+0+2$	chiralny	nie
$12n_{734}$	2..3	4	3	85	-4	$1+3-2-2$	chiralny	nie
$12n_{735}$	1..2	5	3	71	-2	$1+2-4$	chiralny	nie
$12n_{736}$	1	5	3	151	2	$1+2-1+2$	chiralny	nie
$12n_{737}$	2	4	3	45	0	$1+1-5-2$	odwracalny	nie
$12n_{738}$	2	4	3	129	-4	$1+4+1-2$	chiralny	nie
$12n_{739}$	2	4	3	13	4	$1+1+1+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{740}$	1	4	3	105	0	$1-2-2-2$	odwracalny	nie
$12n_{741}$	1..2	4	3	95	2	$1+4+7+3$	odwracalny	nie
$12n_{742}$	2	4	3	91	2	$1+3+3+2$	odwracalny	nie
$12n_{743}$	2	5	3	85	0	$1+3+6$	odwracalny	nie
$12n_{744}$	2	5	3	69	-4	$1+3-3-2$	odwracalny	nie
$12n_{745}$	2	5	3	125	0	$1+1+4-1$	odwracalny	nie
$12n_{746}$	2	5	3	119	2	$1+2+1+2$	odwracalny	nie
$12n_{747}$	2	3	3	101	4	$1+3+3+3+1$	chiralny	nie
$12n_{748}$	1	3	3	79	-2	$1+0-5-4-1$	chiralny	nie
$12n_{749}$	2	3	3	7	-2	$1+6+5+1$	odwracalny	nie
$12n_{750}$	3	3	3	21	-4	$1+3+2$	odwracalny	nie
$12n_{751}$	1..2	3	3	69	0	$1+3+5+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{752}$	2	4	3	87	-2	$1+2+3+2$	odwracalny	nie
$12n_{753}$	2	4	3	105	-4	$1+2-1-2$	chiralny	nie
$12n_{754}$	1	4	3	105	0	$1+2+3+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{755}$	2	5	3	119	-2	$1-2-4+1$	chiralny	nie
$12n_{756}$	2	5	3	99	-2	$1+1+2+2$	odwracalny	nie
$12n_{757}$	2	5	3	115	-2	$1+1-3+1$	chiralny	nie
$12n_{758}$	3..4	5	3	103	-6	$1+10+16+5$	chiralny	nie
$12n_{759}$	2	5	3	111	-2	$1+0-7$	odwracalny	nie
$12n_{760}$	2	5	3	125	0	$1-3-1-2$	odwracalny	nie
$12n_{761}$	2	5	3	61	-4	$1+1+0+3+1$	chiralny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{762}$	2	5	3	69	-4	$1-1+0+3+1$	chiralny	nie
$12n_{763}$	2	5	3	149	0	$1+3+6-1$	chiralny	nie
$12n_{764}$	3..4	4	3	23	-6	$1+10+13+3$	odwracalny	nie
$12n_{765}$	2	5	3	137	-4	$1+2-3-3$	chiralny	nie
$12n_{766}$	2	5	3	97	-4	$1+4-5-3$	chiralny	nie
$12n_{767}$	1	3	3	75	2	$1-1-5-4-1$	chiralny	nie
$12n_{768}$	1..2	4	3	25	0	$1-2-3-1$	chiralny	nie
$12n_{769}$	2..3	4	3	87	2	$1+6+4+2$	chiralny	nie
$12n_{770}$	2	4	3	153	-4	$1+2-2-3$	chiralny	nie
$12n_{771}$	1	4	3	103	2	$1+2+2+2$	chiralny	nie
$12n_{772}$	1..2	4	3	127	-2	$1+4+5+3$	chiralny	nie
$12n_{773}$	2	4	3	89	4	$1-2-7-3$	chiralny	nie
$12n_{774}$	1..2	5	3	51	2	$1-3-4$	chiralny	nie
$12n_{775}$	1..2	5	3	131	-2	$1-3-1-2-1$	chiralny	nie
$12n_{776}$	1..2	5	3	107	-2	$1-1+1-2-1$	chiralny	nie
$12n_{777}$	1..2	4	3	65	0	$1+0-4-2$	odwracalny	nie
$12n_{778}$	2	4	3	85	-4	$1-1-7-3$	chiralny	nie
$12n_{779}$	2	4	3	111	-2	$1+0+1+2$	chiralny	nie
$12n_{780}$	1..2	5	3	81	0	$1+4+2-1$	chiralny	nie
$12n_{781}$	2	4	3	93	0	$1+1+6+4+1$	odwracalny	nie
$12n_{782}$	1..2	4	3	81	0	$1-4-4-2$	chiralny	nie
$12n_{783}$	1..2	5	3	127	-2	$1+4+1+2$	chiralny	nie
$12n_{784}$	1..2	5	3	123	-2	$1+3+1-2-1$	chiralny	nie
$12n_{785}$	1	5	3	91	2	$1-1-6$	odwracalny	nie
$12n_{786}$	1	5	3	139	-2	$1+3+0+2$	chiralny	nie
$12n_{787}$	1	4	3	71	-2	$1-2-5-4-1$	chiralny	nie
$12n_{788}$	1..2	5	3	109	0	$1-3-2-2$	chiralny	nie
$12n_{789}$	1	5	3	89	0	$1-2-3-2$	chiralny	nie
$12n_{790}$	1..2	4	3	133	0	$1+3+5+3+1$	chiralny	nie
$12n_{791}$	2..3	4	3	93	-4	$1+5+3+3+1$	chiralny	nie
$12n_{792}$	1..2	4	3	79	2	$1-4-6-4-1$	chiralny	nie
$12n_{793}$	2..3	4	3	61	-4	$1-3-9-3$	chiralny	nie
$12n_{794}$	1..2	5	3	101	0	$1-5-3-2$	chiralny	nie
$12n_{795}$	1..2	5	3	79	-2	$1-4-6$	chiralny	nie
$12n_{796}$	2..3	4	3	97	-4	$1+4-1-2$	chiralny	nie
$12n_{797}$	2	5	3	59	-2	$1+3-3$	chiralny	nie
$12n_{798}$	2	5	3	91	2	$1+3-1+1$	odwracalny	nie
$12n_{799}$	1..2	5	3	135	-2	$1-2-1+2$	chiralny	nie
$12n_{800}$	1..2	4	3	115	2	$1+1-3-3-1$	chiralny	nie
$12n_{801}$	2	4	3	19	-2	$1+1-1$	odwracalny	nie
$12n_{802}$	1..2	4	3	121	0	$1+2+4+3+1$	chiralny	nie
$12n_{803}$	2..3	4	3	105	-4	$1+6+4+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{804}$	1..3	4	3	95	-2	$1-4-7-4-1$	odwracalny	nie
$12n_{805}$	1..3	5	3	85	0	$1-5-4-2$	odwracalny	nie
$12n_{806}$	3..4	4	3	63	-6	$1+8+14+4$	odwracalny	nie
$12n_{807}$	2	4	3	57	-4	$1+2-4-2$	odwracalny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{808}$	1..2	4	3	31	-2	$1+0-2$	odwracalny	nie
$12n_{809}$	1..3	5	3	15	-2	$1-4-2$	odwracalny	nie
$12n_{810}$	2	5	3	55	-2	$1-2+4+2$	odwracalny	nie
$12n_{811}$	1..3	4	3	63	-2	$1+4+5+2$	odwracalny	nie
$12n_{812}$	1..2	4	3	9	0	$1+2+1$	chiralny	nie
$12n_{813}$	2	5	3	81	0	$1+0-3-2$	odwracalny	nie
$12n_{814}$	1..3	5	3	95	-2	$1+0-6$	odwracalny	nie
$12n_{815}$	1..2	4	3	7	-2	$1-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{816}$	1	5	3	113	0	$1+0-1-2$	chiralny	nie
$12n_{817}$	2	4	3	49	0	$1-4-6-2$	odwracalny	nie
$12n_{818}$	1..3	5	3	91	-2	$1-5-3+1$	odwracalny	nie
$12n_{819}$	1..2	4	3	107	-2	$1+3+6+3$	chiralny	nie
$12n_{820}$	3	3	3	91	6	$1+7+4-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{821}$	1..2	3	3	35	2	$1-3-7-5-1$	odwracalny	nie
$12n_{822}$	1..2	3	3	55	-2	$1-2-8-5-1$	odwracalny	nie
$12n_{823}$	2	4	3	105	4	$1+6+0-2$	odwracalny	nie
$12n_{824}$	1..2	4	3	65	0	$1-4-5-2$	odwracalny	nie
$12n_{825}$	1..2	4	3	45	0	$1-3-6-2$	odwracalny	nie
$12n_{826}$	1..2	5	3	99	-2	$1-3-3+1$	chiralny	nie
$12n_{827}$	2	4	3	119	-2	$1-2-4-3-1$	chiralny	nie
$12n_{828}$	1	4	3	109	0	$1-3-6-3$	chiralny	nie
$12n_{829}$	1..2	3	3	91	2	$1+3-1-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{830}$	3	3	3	17	-4	$1+4+2$	odwracalny	nie
$12n_{831}$	1	3	3	99	-2	$1+1-2-3-1$	odwracalny	nie
$12n_{832}$	2	4	3	105	4	$1+2-5-3$	odwracalny	nie
$12n_{833}$	1..3	4	3	99	2	$1+5+7+3$	odwracalny	nie
$12n_{834}$	2	5	3	113	-4	$1+4+0-2$	chiralny	nie
$12n_{835}$	1..2	4	3	13	0	$1+5+6+1$	odwracalny	nie
$12n_{836}$	2	4	3	117	-4	$1+3+0-2$	chiralny	nie
$12n_{837}$	2	5	3	169	0	$1+2-1+1+1$	odwracalny	nie
$12n_{838}$	2	5	3	25	0	$1-2+1$	odwracalny	nie
$12n_{839}$	2	5	3	121	4	$1+2-4+1+1$	odwracalny	nie
$12n_{840}$	2	5	3	119	2	$1-2+0-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{841}$	1..2	5	3	81	0	$1+0-3-2$	chiralny	nie
$12n_{842}$	1..2	5	3	181	0	$1-1-1+1+1$	chiralny	nie
$12n_{843}$	2	5	3	147	-2	$1+1+3+3$	odwracalny	nie
$12n_{844}$	1..3	6	3	75	2	$1-5+6+3$	odwracalny	nie
$12n_{845}$	2	4	3	99	-2	$1+1+6+3$	odwracalny	nie
$12n_{846}$	2	5	3	81	0	$1+0+5$	odwracalny	nie
$12n_{847}$	2	5	3	75	-2	$1-1-1+1$	odwracalny	nie
$12n_{848}$	2	4	3	85	-4	$1+3+2+3+1$	odwracalny	nie
$12n_{849}$	2	4	3	161	-4	$1+4-1-3$	odwracalny	nie
$12n_{850}$	4	3	3	15	-6	$1+12+18+8+1$	odwracalny	nie
$12n_{851}$	3..4	4	3	5	-4	$1+11+11+2$	odwracalny	nie
$12n_{852}$	1	4	3	125	0	$1+1+4+3+1$	chiralny	nie
$12n_{853}$	1..2	4	3	125	0	$1-3-5-3$	chiralny	nie

nazwa	u	b	br	det	σ	∇	symetria	alt.
$12n_{854}$	1..3	5	3	143	-2	$1+4+4+3$	chiralny	nie
$12n_{855}$	1..3	4	3	85	0	$1-5-8-3$	odwracalny	nie
$12n_{856}$	1..3	5	3	55	2	$1-6-5$	odwracalny	nie
$12n_{857}$	1..2	5	3	139	2	$1-1-1-2-1$	chiralny	nie
$12n_{858}$	1	5	3	111	2	$1+0+1+2$	chiralny	nie
$12n_{859}$	1..3	5	3	149	0	$1-5+0+2+1$	chiralny	nie
$12n_{860}$	2	4	3	143	2	$1+0+3+3$	odwracalny	nie
$12n_{861}$	1..2	4	3	95	-2	$1+4+3+2$	chiralny	nie
$12n_{862}$	2	4	3	127	-2	$1+4+5+3$	chiralny	nie
$12n_{863}$	2..3	4	3	145	-4	$1+4-2-3$	chiralny	nie
$12n_{864}$	1..2	4	3	131	-2	$1-3-5-3-1$	chiralny	nie
$12n_{865}$	1..2	4	3	99	2	$1-3-7-4-1$	chiralny	nie
$12n_{866}$	1..2	4	3	141	0	$1+1+5+3+1$	chiralny	nie
$12n_{867}$	2..3	4	3	133	4	$1+7+2-2$	odwracalny	nie
$12n_{868}$	1..2	4	3	33	0	$1+0+2$	odwracalny	nie
$12n_{869}$	2	5	3	135	-2	$1+2+0+2$	odwracalny	nie
$12n_{870}$	2	5	3	25	0	$1-2-3-1$	chiralny	nie
$12n_{871}$	1	5	3	119	-2	$1+2-3+1$	chiralny	nie
$12n_{872}$	1..2	5	3	131	2	$1+1+0-2-1$	chiralny	nie
$12n_{873}$	1..3	5	3	85	0	$1-5+0+3+1$	-zwierciadlany	nie
$12n_{874}$	2	4	3	123	-2	$1-1-4-3-1$	chiralny	nie
$12n_{875}$	1..2	4	3	99	-2	$1-3-7-4-1$	odwracalny	nie
$12n_{876}$	2	5	3	81	0	$1-4-4-2$	odwracalny	nie
$12n_{877}$	2	5	3	155	2	$1-1+2-1-1$	chiralny	nie
$12n_{878}$	2	5	3	139	-2	$1-1-5+1$	chiralny	nie
$12n_{879}$	2	4	3	143	2	$1+0-1-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{880}$	1..2	4	3	133	0	$1-1-4-3$	odwracalny	nie
$12n_{881}$	2..3	5	3	121	-4	$1+6+9$	odwracalny	nie
$12n_{882}$	3	3	3	99	6	$1+5+3-2-1$	odwracalny	nie
$12n_{883}$	2	4	3	99	-2	$1+1+6+3$	chiralny	nie
$12n_{884}$	1	5	3	81	0	$1+0+5$	chiralny	nie
$12n_{885}$	1..2	5	3	149	0	$1-1+1-2$	chiralny	nie
$12n_{886}$	2	5	3	159	-2	$1+4-1+2$	odwracalny	nie
$12n_{887}$	2	3	3	125	-4	$1+1+0+2+1$	odwracalny	nie
$12n_{888}$	5	3	3	45	-8	$1+13+30+26+9+1$	odwracalny	nie

A.2 Diagramy węzłów pierwszych do dziesięciu skrzyżowań

Poniżej znajdują się diagramy węzłów pierwszych, które realizują liczbę skrzyżowań, jeśli ta nie przekracza dziesięciu. One także pochodzą ze strony KnotInfo [277], o której mowa na początku rozdziału.



(a) 3_1 (b) 4_1 (c) 5_1 (d) 5_2 (e) 6_1



(a) 6_2 (b) 6_3 (c) 7_1 (d) 7_2 (e) 7_3



(a) 7_4 (b) 7_5 (c) 7_6 (d) 7_7 (e) 8_1



(a) 8_2 (b) 8_3 (c) 8_4 (d) 8_5 (e) 8_6



(a) 8_7 (b) 8_8 (c) 8_9 (d) 8_{10} (e) 8_{11}



(a) 8_{12} (b) 8_{13} (c) 8_{14} (d) 8_{15} (e) 8_{16}



(a) 8_{17} (b) 8_{18} (c) 8_{19} (d) 8_{20} (e) 8_{21}



(a) 9_1 (b) 9_2 (c) 9_3 (d) 9_4 (e) 9_5



(a) 9_6 (b) 9_7 (c) 9_8 (d) 9_9 (e) 9_{10}



(a) 9_{11} (b) 9_{12} (c) 9_{13} (d) 9_{14} (e) 9_{15}



(a) 9_{16}



(b) 9_{17}



(c) 9_{18}



(d) 9_{19}



(e) 9_{20}



(a) 9_{21}



(b) 9_{22}



(c) 9_{23}



(d) 9_{24}



(e) 9_{25}



(a) 9_{26}



(b) 9_{27}



(c) 9_{28}



(d) 9_{29}



(e) 9_{30}



(a) 9_{31}



(b) 9_{32}



(c) 9_{33}



(d) 9_{34}



(e) 9_{35}



(a) 9_{36}



(b) 9_{37}



(c) 9_{38}



(d) 9_{39}



(e) 9_{40}



(a) 9_{41} (b) 9_{42} (c) 9_{43} (d) 9_{44} (e) 9_{45}



(a) 9_{46} (b) 9_{47} (c) 9_{48} (d) 9_{49} (e) 10_1



(a) 10_2 (b) 10_3 (c) 10_4 (d) 10_5 (e) 10_6



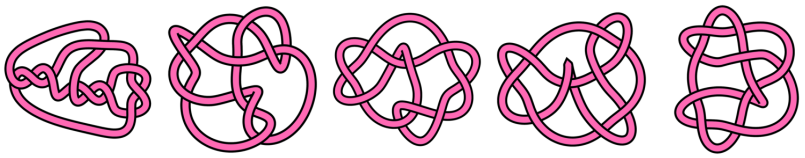
(a) 10_7 (b) 10_8 (c) 10_9 (d) 10_{10} (e) 10_{11}



(a) 10_{12} (b) 10_{13} (c) 10_{14} (d) 10_{15} (e) 10_{16}



(a) 10_{17} (b) 10_{18} (c) 10_{19} (d) 10_{20} (e) 10_{21}



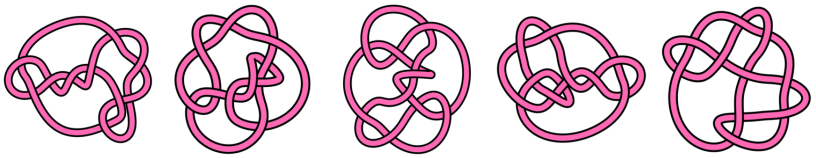
(a) 10_{22} (b) 10_{23} (c) 10_{24} (d) 10_{25} (e) 10_{26}



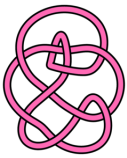
(a) 10_{27} (b) 10_{28} (c) 10_{29} (d) 10_{30} (e) 10_{31}



(a) 10_{32} (b) 10_{33} (c) 10_{34} (d) 10_{35} (e) 10_{36}



(a) 10_{37} (b) 10_{38} (c) 10_{39} (d) 10_{40} (e) 10_{41}



(a) 10_{42}



(b) 10_{43}



(c) 10_{44}



(d) 10_{45}



(e) 10_{46}



(a) 10_{47}



(b) 10_{48}



(c) 10_{49}



(d) 10_{50}



(e) 10_{51}



(a) 10_{52}



(b) 10_{53}



(c) 10_{54}



(d) 10_{55}



(e) 10_{56}



(a) 10_{57}



(b) 10_{58}



(c) 10_{59}



(d) 10_{60}



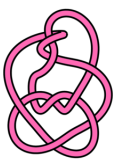
(e) 10_{61}



(a) 10_{62}



(b) 10_{63}



(c) 10_{64}



(d) 10_{65}



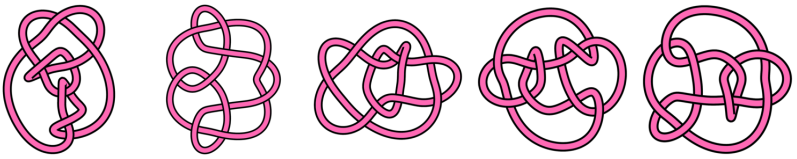
(e) 10_{66}



(a) 10_{67} (b) 10_{68} (c) 10_{69} (d) 10_{70} (e) 10_{71}



(a) 10_{72} (b) 10_{73} (c) 10_{74} (d) 10_{75} (e) 10_{76}



(a) 10_{77} (b) 10_{78} (c) 10_{79} (d) 10_{80} (e) 10_{81}



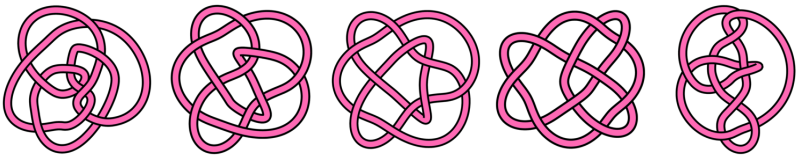
(a) 10_{82} (b) 10_{83} (c) 10_{84} (d) 10_{85} (e) 10_{86}



(a) 10_{87} (b) 10_{88} (c) 10_{89} (d) 10_{90} (e) 10_{91}



(a) 10_{92} (b) 10_{93} (c) 10_{94} (d) 10_{95} (e) 10_{96}



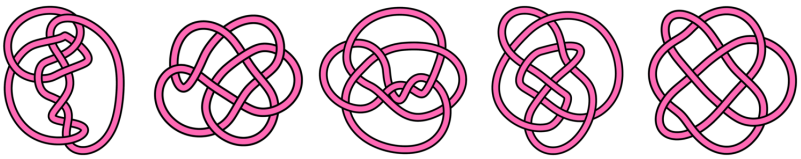
(a) 10_{97} (b) 10_{98} (c) 10_{99} (d) 10_{100} (e) 10_{101}



(a) 10_{102} (b) 10_{103} (c) 10_{104} (d) 10_{105} (e) 10_{106}



(a) 10_{107} (b) 10_{108} (c) 10_{109} (d) 10_{110} (e) 10_{111}



(a) 10_{112} (b) 10_{113} (c) 10_{114} (d) 10_{115} (e) 10_{116}



(a) 10_{117} (b) 10_{118} (c) 10_{119} (d) 10_{120} (e) 10_{121}



(a) 10_{122} (b) 10_{123} (c) 10_{124} (d) 10_{125} (e) 10_{126}



(a) 10_{127} (b) 10_{128} (c) 10_{129} (d) 10_{130} (e) 10_{131}



(a) 10_{132} (b) 10_{133} (c) 10_{134} (d) 10_{135} (e) 10_{136}



(a) 10_{137} (b) 10_{138} (c) 10_{139} (d) 10_{140} (e) 10_{141}



(a) 10_{142}



(b) 10_{143}



(c) 10_{144}



(d) 10_{145}



(e) 10_{146}



(a) 10_{147}



(b) 10_{148}



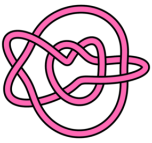
(c) 10_{149}



(d) 10_{150}



(e) 10_{151}



(a) 10_{152}



(b) 10_{153}



(c) 10_{154}



(d) 10_{155}



(e) 10_{156}



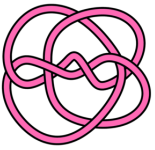
(a) 10_{157}



(b) 10_{158}



(c) 10_{159}



(d) 10_{160}



(e) 10_{161}



(a) 10_{162}



(b) 10_{163}



(c) 10_{164}



(d) 10_{165}

B. Tablice splotów

B.1 Diagramy splotów pierwszych do dziewięciu skrzyżowań

Poniżej znajdują się diagramy splotów pierwszych, które realizują liczbę skrzyżowań, jeśli ta nie przekracza dziewięciu. Pochodzą one z bazy danych LinkInfo [278], siostrzanego projektu KnotInfo (o którym mowa na początku rozdziału) prowadzonego przez tych samych autorów – Charlesa Livingstona oraz Allison Moore – tym razem poświęconego splotom, a nie tylko węzłom.



(a) $2_1^2 = L_2a_1$ (b) $4_1^2 = L_4a_1$ (c) $5_1^2 = L_5a_1$ (d) $6_1^2 = L_6a_3$ (e) $6_2^2 = L_6a_2$



(a) $6_3^2 = L_6a_1$ (b) $6_1^3 = L_6a_5$ (c) $6_2^3 = L_6a_4$ (d) $6_3^3 = L_6n_1$ (e) $7_1^2 = L_7a_6$



(a) $7_2^2 = L_7a_5$ (b) $7_3^2 = L_7a_4$ (c) $7_4^2 = L_7a_3$ (d) $7_5^2 = L_7a_2$ (e) $7_6^2 = L_7a_1$



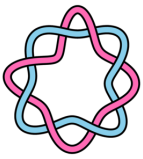
(a) $7_7^2 = L_7n_1$



(b) $7_8^2 = L_7n_2$



(c) $7_1^3 = L_7a_7$



(d) $8_1^2 = L_8a_{14}$



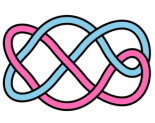
(e) $8_2^2 = L_8a_{12}$



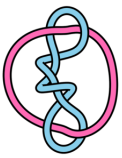
(a) $8_3^2 = L_8a_{11}$



(b) $8_4^2 = L_8a_{13}$



(c) $8_5^2 = L_8a_{10}$



(d) $8_6^2 = L_8a_6$



(e) $8_7^2 = L_8a_8$



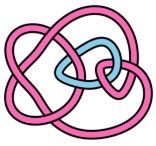
(a) $8_8^2 = L_8a_9$



(b) $8_9^2 = L_8a_3$



(c) $8_{10}^2 = L_8a_2$



(d) $8_{11}^2 = L_8a_5$



(e) $8_{12}^2 = L_8a_4$



(a) $8_{13}^2 = L_8a_1$



(b) $8_{14}^2 = L_8a_7$



(c) $8_{15}^2 = L_8n_2$



(d) $8_{16}^2 = L_8n_1$



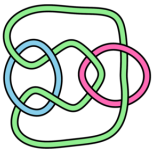
(e) $8_1^3 = L_8a_{18}$



(a) $8_2^3 = L_8a_{17}$



(b) $8_3^3 = L_8a_{15}$



(c) $8_4^3 = L_8a_{20}$



(d) $8_5^3 = L_8a_{16}$



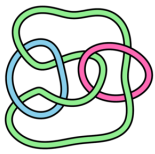
(e) $8_6^3 = L_8a_{19}$



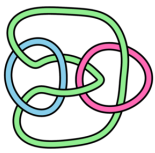
(a) $8_7^3 = L_8n_3$



(b) $8_8^3 = L_8n_4$



(c) $8_9^3 = L_8n_5$



(d) $8_{10}^3 = L_8n_6$



(e) $8_1^4 = L_8a_{21}$



(a) $8_2^4 = L_8n_7$



(b) $8_3^4 = L_8n_8$



(c) $9_1^2 = L_9a_{36}$



(d) $9_2^2 = L_9a_{39}$



(e) $9_3^2 = L_9a_{30}$



(a) $9_4^2 = L_9a_{40}$



(b) $9_5^2 = L_9a_{38}$



(c) $9_6^2 = L_9a_{34}$



(d) $9_7^2 = L_9a_{37}$



(e) $9_8^2 = L_9a_{25}$



(a) $9_9^2 = L_9a_{35}$



(b) $9_{10}^2 = L_9a_{18}$



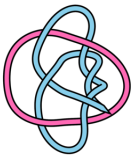
(c) $9_{11}^2 = L_9a_{26}$



(d) $9_{12}^2 = L_9a_{27}$



(e) $9_{13}^2 = L_9a_{14}$



(a) $9_{14}^2 = L_9a_{12}$



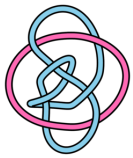
(b) $9_{15}^2 = L_9a_{15}$



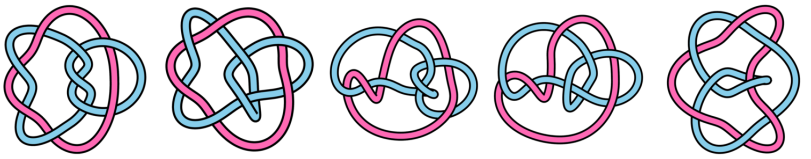
(c) $9_{16}^2 = L_9a_{13}$



(d) $9_{17}^2 = L_9a_7$



(e) $9_{18}^2 = L_9a_4$



(a) $9^2_{19} = L9a29$ (b) $9^2_{20} = L9a28$ (c) $9^2_{21} = L9a24$ (d) $9^2_{22} = L9a23$ (e) $9^2_{23} = L9a41$



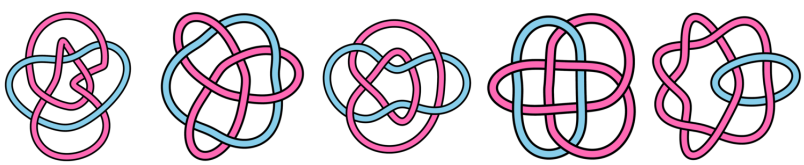
(a) $9^2_{24} = L9a33$ (b) $9^2_{25} = L9a8$ (c) $9^2_{26} = L9a11$ (d) $9^2_{27} = L9a17$ (e) $9^2_{28} = L9a16$



(a) $9^2_{29} = L9a6$ (b) $9^2_{30} = L9a5$ (c) $9^2_{31} = L9a2$ (d) $9^2_{32} = L9a1$ (e) $9^2_{33} = L9a3$



(a) $9^2_{34} = L9a21$ (b) $9^2_{35} = L9a22$ (c) $9^2_{36} = L9a10$ (d) $9^2_{37} = L9a9$ (e) $9^2_{38} = L9a19$



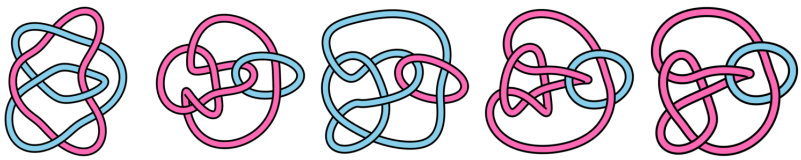
(a) $9^2_{39} = L9a31$ (b) $9^2_{40} = L9a32$ (c) $9^2_{41} = L9a42$ (d) $9^2_{42} = L9a20$ (e) $9^2_{43} = L9n4$



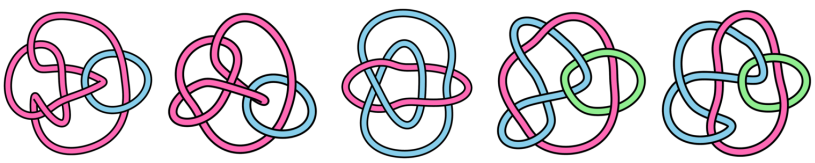
(a) $9^2_{44} = L9n5$ (b) $9^2_{45} = L9n1$ (c) $9^2_{46} = L9n2$ (d) $9^2_{47} = L9n3$ (e) $9^2_{48} = L9n7$



(a) $9^2_{49} = L9n15$ (b) $9^2_{50} = L9n14$ (c) $9^2_{51} = L9n16$ (d) $9^2_{52} = L9n17$ (e) $9^2_{53} = L9n18$



(a) $9^2_{54} = L9n13$ (b) $9^2_{55} = L9n6$ (c) $9^2_{56} = L9n8$ (d) $9^2_{57} = L9n11$ (e) $9^2_{58} = L9n10$



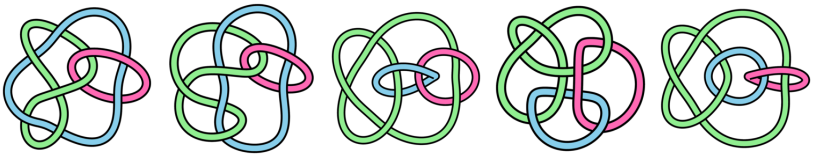
(a) $9^2_{59} = L9n12$ (b) $9^2_{60} = L9n9$ (c) $9^2_{61} = L9n19$ (d) $9^3_1 = L9a50$ (e) $9^3_2 = L9a47$



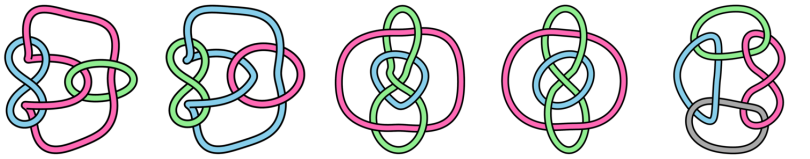
(a) $9^3_3 = L9a44$ (b) $9^3_4 = L9a43$ (c) $9^3_5 = L9a48$ (d) $9^3_6 = L9a49$ (e) $9^3_7 = L9a45$



(a) $9_8^3 = L9a_{52}$ (b) $9_9^3 = L9a_{54}$ (c) $9_{10}^3 = L9a_{46}$ (d) $9_{11}^3 = L9a_{51}$ (e) $9_{12}^3 = L9a_{53}$



(a) $9_{13}^3 = L9n_{23}$ (b) $9_{14}^3 = L9n_{24}$ (c) $9_{15}^3 = L9n_{22}$ (d) $9_{16}^3 = L9n_{20}$ (e) $9_{17}^3 = L9n_{21}$

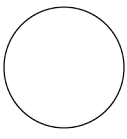


(a) $9_{18}^3 = L9n_{25}$ (b) $9_{19}^3 = L9n_{26}$ (c) $9_{20}^3 = L9n_{28}$ (d) $9_{21}^3 = L9n_{27}$ (e) $9_1^4 = L9a_{55}$

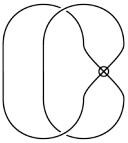
C. Tablice węzłów wirtualnych

C.1 Diagramy węzłów wirtualnych

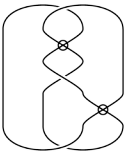
Poniżej znajdują się diagramy węzłów wirtualnych o mniej niż pięciu skrzyżowaniach. One pochodzą ze strony http://www.math.toronto.edu/drorbn/Students/GreenJ/ (ostatnio zaktualizowana 2 stycznia 2023).



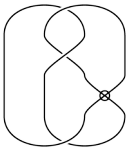
(a) 0.1



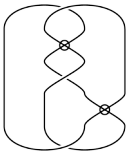
(b) 2.1



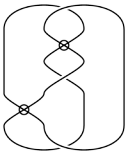
(c) 3.1



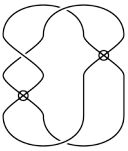
(d) 3.2



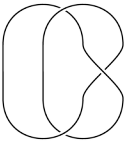
(e) 3.3



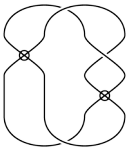
(a) 3.4



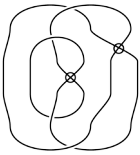
(b) 3.5



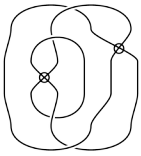
(c) 3.6



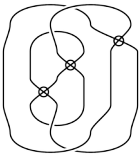
(d) 3.7



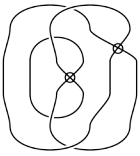
(e) 4.1



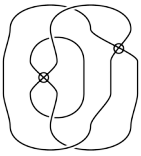
(a) 4.2



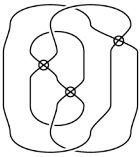
(b) 4.3



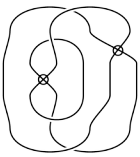
(c) 4.4



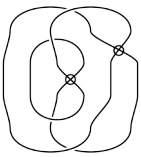
(d) 4.5



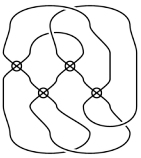
(e) 4.6



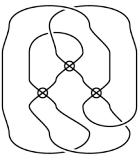
(a) 4.7



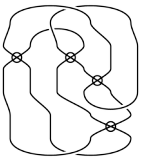
(b) 4.8



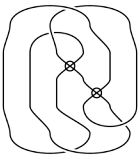
(c) 4.9



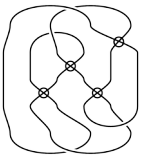
(d) 4.10



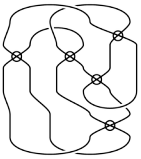
(e) 4.11



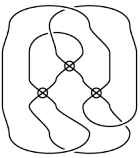
(a) 4.12



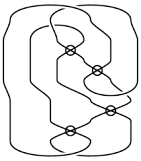
(b) 4.13



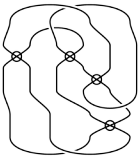
(c) 4.14



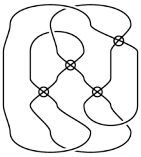
(d) 4.15



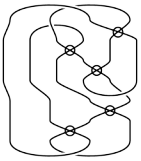
(e) 4.16



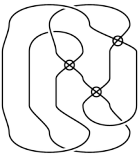
(a) 4.17



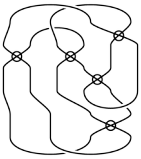
(b) 4.18



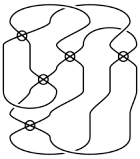
(c) 4.19



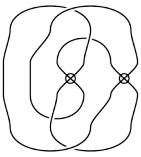
(d) 4.20



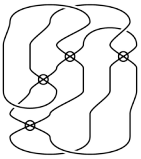
(e) 4.21



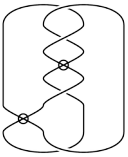
(a) 4.22



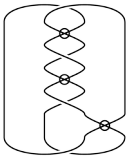
(b) 4.23



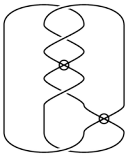
(c) 4.24



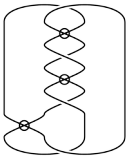
(d) 4.25



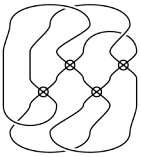
(e) 4.26



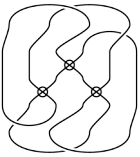
(a) 4.27



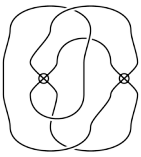
(b) 4.28



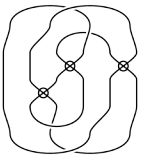
(c) 4.29



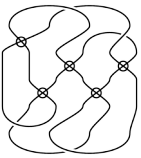
(d) 4.30



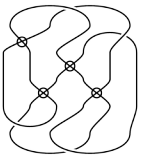
(e) 4.31



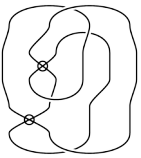
(a) 4.32



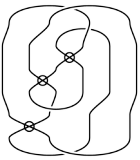
(b) 4.33



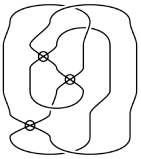
(c) 4.34



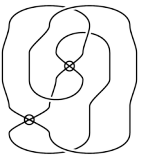
(d) 4.35



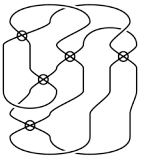
(e) 4.36



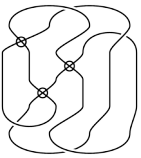
(a) 4.37



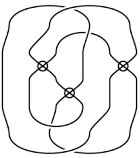
(b) 4.38



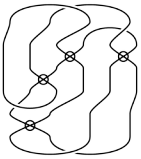
(c) 4.39



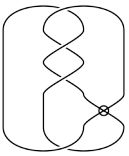
(d) 4.40



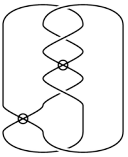
(e) 4.41



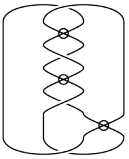
(a) 4.42



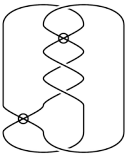
(b) 4.43



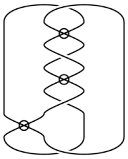
(c) 4.44



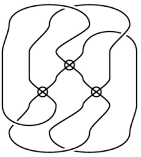
(d) 4.45



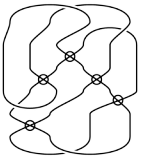
(e) 4.46



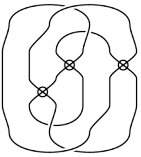
(a) 4.47



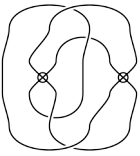
(b) 4.48



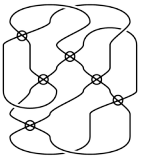
(c) 4.49



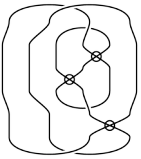
(d) 4.50



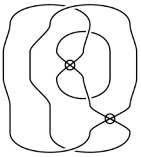
(e) 4.51



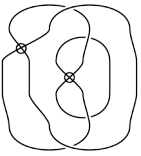
(a) 4.52



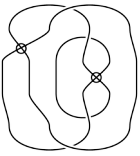
(b) 4.53



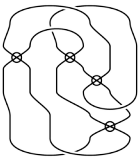
(c) 4.54



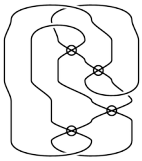
(d) 4.55



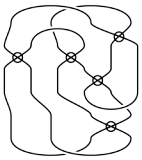
(e) 4.56



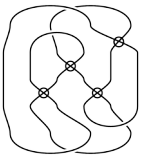
(a) 4.57



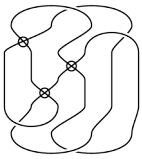
(b) 4.58



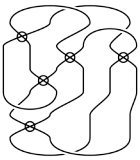
(c) 4.59



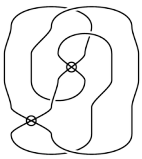
(d) 4.60



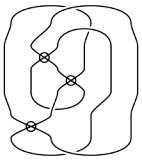
(e) 4.61



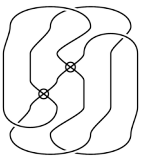
(a) 4.62



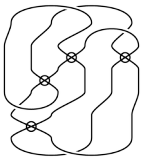
(b) 4.63



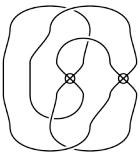
(c) 4.64



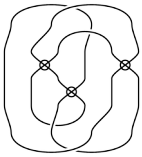
(d) 4.65



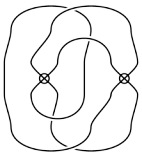
(e) 4.66



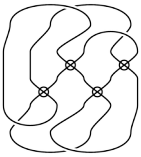
(a) 4.67



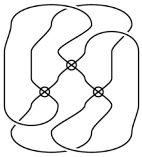
(b) 4.68



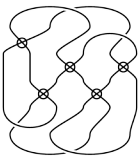
(c) 4.69



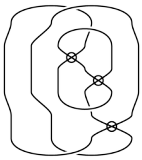
(d) 4.70



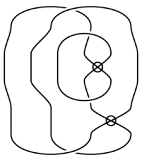
(e) 4.71



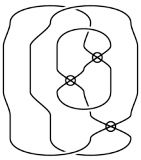
(a) 4.72



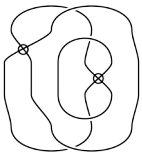
(b) 4.73



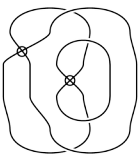
(c) 4.74



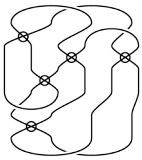
(d) 4.75



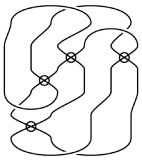
(e) 4.76



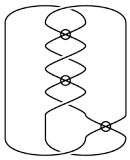
(a) 4.77



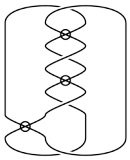
(b) 4.78



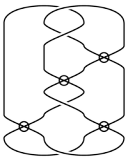
(c) 4.79



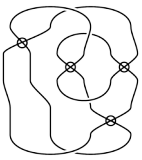
(d) 4.80



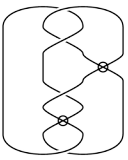
(e) 4.81



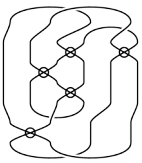
(a) 4.82



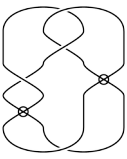
(b) 4.83



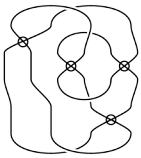
(c) 4.84



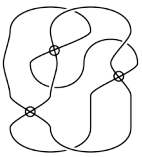
(d) 4.85



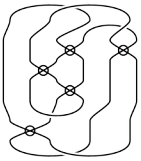
(e) 4.86



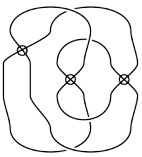
(a) 4.87



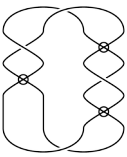
(b) 4.88



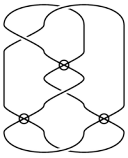
(c) 4.89



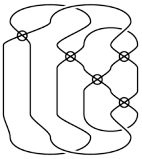
(d) 4.90



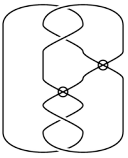
(e) 4.91



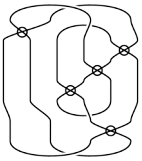
(a) 4.92



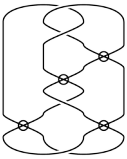
(b) 4.93



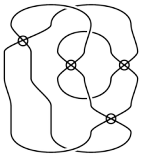
(c) 4.94



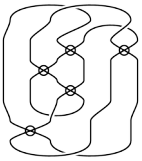
(d) 4.95



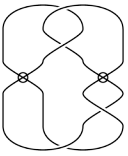
(e) 4.96



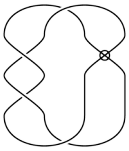
(a) 4.97



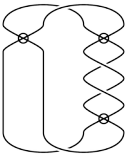
(b) 4.98



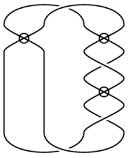
(c) 4.99



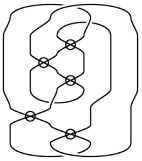
(d) 4.100



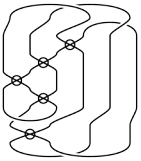
(e) 4.101



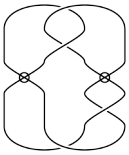
(a) 4.102



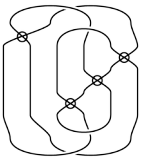
(b) 4.103



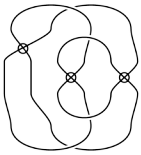
(c) 4.104



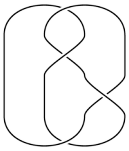
(d) 4.105



(e) 4.106



(a) 4.107



(b) 4.108

D. Notacja, użyte symbole

Przez $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oznaczamy kolejno zbiór liczb naturalnych (z zerem lub bez, jak kto lubi), całkowitych, wymiernych, rzeczywistych i wreszcie zespolonych. S^n oznacza n-sferę (i tak S^1 jest okręgiem, zaś S^2 powierzchnią trójwymiarowej kuli); D^n to n-dysk. Włożenie A w B to $A \hookrightarrow B$, ich izotopia to $A \cong B$. Kratka (#) oznacza sumę spójną. Suma rozłączna $\sqcup$ tym różni się od teoriomnogościowej $\cup$, że składniki muszą być rozłączne. Obraz funkcji $f\colon X \to Y$ staramy się oznaczać $f[X]$, nie $f(X)$. Lustro i rewers węzła K oznaczamy kolejno m K i r K.

Dla wielomianowych niezmienników stosujemy następujące symbole: Δ, ∇, V, P, F, Q dla wielomianu Alexandera, Conwaya, Jonesa, HOMFLY-PT, Kauffmana, BLM/Ho. Wiele innych niezmienników ma krótkie, jednoliterowe oznaczenia. I tak cr, b, br, u, lk, s to kolejno: liczba/indeks skrzyżowaniowy, warkoczowy, mostowy, gordyjska, zaczepienia, patykowa. σ oznacza sygnaturę (Levine'a-Tristrama), det wyznacznik, g, χ genus i charakterystykę Eulera, wr spin, lk indeks zaczepienia. Rzadko, naprawdę rzadko, potrzebujemy czegoś dla liczby p-kolorowań, wybór pada zawsze na τ_p.

E. Słownik angielsko-polski

- **2-przejście**: 2-pass move
- **algebra chińskich znaków**: algebra of Chinese characters
- **band sum**: suma paskowa
- **ciało z rączkami**: handlebody
- **cień**: shadow
- **diagram**: diagram (*cięciw*: chord, *cięty*: sliced)
- **długość sznurowa**: ropelength
- **genus**: genus (*kanoniczny*: canonical, *wolny*: free)
- **geografia**: — (*długość geograficzna*: longitude, *południk*: meridian (of longitude), *równoleżnik*: parallel (of latitude), *szerokość geograficzna*: latitude)
- **homeomorfizm wierny**: faithful homeomorphism
- **indeks skrzyżowaniowy**: crossing number
- **indeks zaczepienia**: linking number
- **izotopia**: isotopy (*otaczająca*: ambient)
- **klamra Kauffmana**: Kauffman bracket
- **kwandel**: quandle
- **kłąb**: skein
- **liczba gordyjska**: unknotting number
- **liczba mostowa**: bridge number
- **liczba patykowa**: stick number
- **liczba warkoczowa**: braid number
- **niewęzeł**: unknot
- **niezmiennik**: invariant (… *skończonego typu*: finite type …)
- **nieściśliwy**: incompressible
- **obramowanie**: framing
- **ogniwo splotu**: component
- **okres**: period
- **pięciolistnik**: cinquefoil knot
- **pochodna Foxa**: Fox derivative
- **przesmyk**: isthmus
- **przeszkoda Lickorisha**: Lickorish obstruction
- **półka**: shelf

- **relacja kłębiasta**: skein relation
- **rozmaitość**: manifold (*szpiczasta*: cusped, *szwowa*: sutured)
- **rozwłókniony, włóknisty**: fibered
- **ruch Reidemeistera/Turajewa/...**: Reidemeister/Turaev/... move
- **skrzyżowanie**: crossing (*znak*: sign)
- **spin**: writhe
- **splot**: link (*rozszczepialny*: splittable, *sznurkowy*: string)
- **suma niespójna**: distant union
- **suma spójna**: connected sum
- **supeł**: tangle (*licznik ...*: ... numerator, *mianownik ...*: ... denominator)
- **sygnatura**: signature
- **szwindel Mazura**: Mazur swindle
- **tablica rzeczywistości**: actuality table
- **tablica węzłów**: knot table
- **torus**: torus (*połykająco-podążający*: swallow-follow)
- **trójlistnik**: trefoil knot
- **układ ciężarów**: weight system
- **warkocz**: braid (*czysty*: pure, *domknięcie ...*: closure of ..., *pasmo ...*: strand)
- **wielomian Jonesa**: Jones polynomial (*powiększony*: augmented)
- **wygładzenie**: smoothing
- **węzeł**: knot (*adekwatny*: adequate, *alternujący*: alternating, *drzewiasty*: arborescent, *dziki*: wild, *długi*: long, *ilorazowy*: quotient, *lustro/lustrzany*: mirror, *obramowany*: framed, *odwracalny*: reversible, *okresowy*: periodic, *osobliwy*: singular, *pierwszy*: prime, *plastrowy*: slice, *poskromiony/swojski*: tame, *preclowy*: pretzel, *rewers/odwrotny*: reverse, *skręcony*: twist, *skrętny/chiralny*: chiral, *wirtualny*: virtual, *zespawany*: welded, *zorientowany*: oriented, *zwierciadlany*: achiral/amphicheiral, *złożony*: composite)
- **węzeł babski**: granny knot
- **węzeł dokerski**: stevedore knot
- **złączanie**: splicing
- **ósemka**: figure-eight

Bibliografia

[1] Colin C. Adams. *Hyperbolic structures on link complements*. Praca doktorska, The University of Wisconsin, Madison, 1983.

[2] Colin C. Adams. *The knot book*. W. H. Freeman and Company, Nowy Jork, 1994.

[3] Colin C. Adams. Toroidally alternating knots and links. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 33(2):353–369, 1994.

[4] Colin C. Adams. Hyperbolic knots. W *Handbook of knot theory*, strony 1–18. Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.

[5] Colin C. Adams. Triple crossing number of knots and links. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 22(2):17, 2013.

[6] Colin C. Adams, Bevin M. Brennan, Deborah L. Greilsheimer oraz Alexander K. Woo. Stick numbers and composition of knots and links. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 6(2):149–161, 1997.

[7] Colin C. Adams, Jeffrey F. Brock, John Bugbee, Timothy D. Comar, Keith A. Faigin, Amy M. Huston, Anne M. Joseph oraz David Pesikoff. Almost alternating links. *Topology and its Applications*, 46(2):151–165, 1992.

[8] Colin C. Adams, Thomas Crawford, Benjamin Demeo, Michael Landry, Alex T. Lin, Murphy K. Montee, Seojung Park, Saraswathi Venkatesh oraz Farrah Yhee. Knot projections with a single multi-crossing. https://arxiv.org/abs/1208.5742, 2012.

[9] Colin C. Adams, Erica Flapan, Allison Henrich, Louis H. Kauffman, Lewis D. Ludwig oraz Sam Nelson. *Encyclopedia of knot theory*. CRC Press, 2020.

[10] Ian Agol. The minimal volume orientable hyperbolic 2-cusped 3-manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 138(10):3723–3732, 2010.

[11] James W. Alexander. A lemma on systems of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, strony 93–95, 1923.

[12] James W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2):275–306, 1928.

[13] James W. Alexander oraz Garland B. Briggs. On types of knotted curves. *Annals of Mathematics. Second Series*, 28(1-4):562–586, 1927.

[14] Brian Arnold, Michael Au, Christoper Candy, Kaan Erdener, James Fan, Richard Flynn, Robs J. Muir, Danny Wu oraz Jim Hoste. Tabulating alternating knots through 14 crossings. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 3(4):433–437, 1994.

[15] Emil Artin. Theorie der Zöpfe. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 4(1):47–72, 1925.

[16] Robert J. Aumann. Asphericity of alternating knots. *Annals of Mathematics. Second Series*, 64:374–392, 1956.

[17] Lluís Bacardit oraz Warren Dicks. Actions of the braid group, and new algebraic proofs of results of Dehornoy and Larue. *Groups. Complexity. Cryptology*, 1(1):77–129, 2009.

[18] Yongju Bae oraz In S. Lee. On Alexander polynomials of pretzel links. *Kyungpook Mathematical Journal*, 60(2):239–253, 2020.

[19] Carl Bankwitz. Über die Torsionszahlen der alternierenden Knoten. *Mathematische Annalen*, 103(1):145–161, 1930.

[20] Carl Bankwitz oraz Hans G. Schumann. Über Viergeflechte. W *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, tom 10, strony 263–284. Springer, 1934.

[21] Dror Bar-Natan. Weights of Feynman diagrams and the Vassiliev knot invariants. https://www.math.toronto.edu/~drorbn/papers/weights/weights.pdf, 1991.

[22] Dror Bar-Natan. On the Vassiliev knot invariants. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 34(2):423–472, 1995.

[23] Dror Bar-Natan. Polynomial invariants are polynomial. *Mathematical Research Letters*, 2(3):239–246, 1995.

[24] Dror Bar-Natan. Vassiliev homotopy string link invariants. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 4(1):13–32, 1995.

[25] Dror Bar-Natan. On Khovanov's categorification of the Jones polynomial. *Algebraic & Geometric Topology*, 2:337–370, 2002.

[26] Dror Bar-Natan. Fast Khovanov homology computations. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 16(3):243–255, 2007.

[27] Riccardo Benedetti oraz Carlo Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[28] James A. Bernhard. Unknotting numbers and minimal knot diagrams. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 3(1):1–5, 1994.

[29] Stephen J. Bigelow. The Burau representation is not faithful for $n = 5$. *Geometry and Topology*, 3:397–404, 1999.

[30] Stephen J. Bigelow. Braid groups are linear. *Journal of the American Mathematical Society*, 14(2):471–486, 2001.

[31] Ronly H. Bing oraz Joseph M. Martin. Cubes with knotted holes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 155(1):217–231, 1971.

[32] Joan S. Birman. *Braids, links, and mapping class groups*. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokio, 1974.

[33] Joan S. Birman oraz Tara E. Brendle. Braids: a survey. W *Handbook of knot theory*, strony 19–103. Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.

[34] Joan S. Birman oraz Xiao-Song Lin. Knot polynomials and Vassiliev's invariants. *Inventiones Mathematicae*, 111(2):225–270, 1993.

[35] Joan S. Birman oraz William W. Menasco. On Markov's theorem. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 11(3):295–310, 2002. Knots 2000 Korea, tom 1 (Yongpyong).

[36] Ryan Blair, Alexandra Kjuchukova, Roman Velazquez oraz Paul Villanueva. Wirtinger systems of generators of knot groups. *Communications in Analysis and Geometry*, 28(2):243–262, 2020.

[37] Steven A. Bleiler. A note on unknotting number. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 96(3):469–471, 1984.

[38] Miles G. V. Bogle, John E. Hearst, Vaughan F. R. Jones oraz Luben Stoilov. Lissajous knots. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 3(2):121–140, 1994.

[39] Frederic Bohnenblust. The algebraical braid group. *Annals of Mathematics. Second Series*, 48:127–136, 1947.

[40] Michel Boileau oraz Laurent Siebenmann. *A planar classification of pretzel knots and Montesinos knots*. Université de Paris-Sud. Département de Mathématique, 1980.

[41] Béla Bollobás oraz Oliver Riordan. Linearized chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 9(7):847–853, 2000.

[42] Francis Bonahon. *Involutions et fibrés de Seifert dans les variétés de dimension 3*. Praca doktorska, University of Paris XI (Orsay), 1979.

[43] Francis Bonahon oraz Laurent Siebenmann. Geometric splittings of knots, and Conway's algebraic knots. 1989.

[44] Francis Bonahon oraz Laurent Siebenmann. Les nœuds algébriques. 1979.

[45] Francis Bonahon oraz Laurent Siebenmann. New geometric splittings of classical knots. 1989.

[46] Maciej Borodzik oraz Stefan Friedl. The unknotting number and classical invariants II. *Glasgow Mathematical Journal*, 56(3):657–680, 2014.

[47] Maciej Borodzik oraz Stefan Friedl. The unknotting number and classical invariants, I. *Algebraic & Geometric Topology*, 15(1):85–135, 2015.

[48] Maciej Borodzik, Przemysław Grabowski, Adam Król oraz Maria Marchwicka. Linking forms, finite orthogonal groups and periodicity of links. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 72(4):1025–1048, 2020.

[49] Maciej Borodzik oraz Krzysztof Oleszkiewicz. On the signatures of torus knots. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics*, 58(2):167–177, 2010.

[50] Maciej Borodzik oraz Wojciech Politarczyk. Khovanov homology and periodic links. *Indiana University Mathematics Journal*, 70(1):235–267, 2021.

[51] Robert D. Brandt, William B. R. Lickorish oraz Kenneth C. Millett. A polynomial invariant for unoriented knots and links. *Inventiones Mathematicae*, 84(3):563–573, 1986.

[52] Egbert Brieskorn. Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. *Inventiones Mathematicae*, 2(1):1–14, 1966.

[53] Mark W. Brittenham oraz Susan M. Hermiller. A counterexample to the Bernhard–Jablan unknotting conjecture. *Experimental Mathematics*, 30(4):547–556, 2021.

[54] Mark W. Brittenham oraz Jacqueline Jensen. Canonical genus and the Whitehead doubles of pretzel knots. https://arxiv.org/abs/math/0608765, 2006.

[55] David J. Broadhurst. Conjectured enumeration of Vassiliev invariants. https://arxiv.org/abs/q-alg/9709031, 1997.

[56] Julian E. Brody. The topological classification of the lens spaces. *Annals of Mathematics. Second Series*, 71(1):163–184, 1960.

[57] Kathryn Brownell, Kaitlyn Oneil oraz Laura Taalman. Counting m-coloring classes of knots and links. *Pi Mu Epsilon Journal*, 12(5):265–278, 2006.

[58] Hermann Brunn. Über Verkettung. W *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse*, strony 77–99. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, 1892.

[59] Werner Burau. Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 11(1):179–186, 1935.

[60] Gerhard Burde. Alexanderpolynome Neuwirthscher Knoten. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 1966.

[61] Gerhard Burde. Über periodische Knoten. *Archiv der Mathematik*, 30(1):487–492, 1978.

[62] Gerhard Burde oraz Heiner Zieschang. Eine Kennzeichnung der Torusknoten. *Mathematische Annalen*, 167:169–176, 1966.

[63] Gerhard Burde oraz Heiner Zieschang. Neuwirthsche Knoten und Flächenabbildungen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 1967.

[64] Gerhard Burde, Heiner Zieschang oraz Michael Heusener. *Knots*, tom 5 *De Gruyter Studies in Mathematics*. De Gruyter, Berlin, 2014.

[65] Heidi Burgiel, Deborah S. Franzblau oraz Kevin R. Gutschera. The mystery of the linked triangles. *Mathematics Magazine*, 69(2):94–102, 1996.

[66] Benjamin A. Burton. The next 350 million knots. W *36th International Symposium on Computational Geometry*, tom 164 *LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform.*, strony 1–17. Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zentrum für Informatik GmbH, Wadern, 2020.

[67] Benjamin A. Burton, Hsien-Chih Chang, Maarten Löffler, Arnaud Mesmay, Clément Maria, Saul Schleimer, Eric Sedgwick oraz Jonathan Spreer. Hard diagrams of the unknot. https://arxiv.org/abs/2104.14076, 2021.

[68] Benjamin A. Burton, Joachim H. Rubinstein oraz Stephan Tillmann. The Weber-Seifert dodecahedral space is non-Haken. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(2):911–932, 2012.

[69] Jorge A. Calvo. *Geometric knot theory*. Praca doktorska, University of California, Santa Barbara, 1998.

[70] Jorge A. Calvo. Geometric knot spaces and polygonal isotopy. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 10(2):245–267, 2001. Knots in Hellas '98, tom 2 (Delphi).

[71] Jason Cantarella, Robert B. Kusner oraz John M. Sullivan. On the minimum ropelength of knots and links. *Inventiones Mathematicae*, 150(2):257–286, 2002.

[72] Chun Cao oraz Robert G. Meyerhoff. The orientable cusped hyperbolic 3-manifolds of minimum volume. *Inventiones Mathematicae*, 146(3):451–478, 2001.

[73] Andrew J. Casson oraz Cameron McA. Gordon. On slice knots in dimension three. W *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, strony 39–53. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.

[74] Andrew J. Casson oraz Cameron McA. Gordon. Cobordism of classical knots. W *À la recherche de la topologie perdue*, tom 62 *Progr. Math.*, strony 181–199. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1986.

[75] Alain Caudron. *Classification des nœuds et des enlacements*, tom 4 *Publications Mathématiques d'Orsay 82 [Mathematical Publications of Orsay 82]*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, Orsay, 1982.

[76] Corinne Cerf. Atlas of oriented knots and links. http://at.yorku.ca/t/a/i/c/31.htm, 1998.

[77] Jae C. Cha oraz Charles Livingston. Unknown values in the table of knots. https://arxiv.org/abs/math/0503125, 2018.

[78] Haimiao Chen. On the groups of periodic links. https://arxiv.org/abs/1805.02219, 2018.

[79] Kuo T. Chen, Ralph H. Fox oraz Roger C. Lyndon. Free differential calculus. IV. The quotient groups of the lower central series. *Annals of Mathematics. Second Series*, 68:81–95, 1958.

[80] Sergei V. Chmutov. A quadratic lower bound for the number of primitive Vassiliev invariants. W *Workshop report, Waseda University, Tokyo*, strony 52–54, 1996.

[81] Sergei V. Chmutov. Combinatorics of Vassiliev invariants. W *Introductory lectures on knot theory*, tom 46 *Ser. Knots Everything*, strony 54–76. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2012.

[82] Sergei V. Chmutov oraz Sergei V. Duzhin. An upper bound for the number of Vassiliev knot invariants. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 3(2):141–151, 1994.

[83] Sergei V. Chmutov oraz Sergei V. Duzhin. A lower bound for the number of Vassiliev knot invariants. *Topology and its Applications*, 92(3):201–223, 1999.

[84] Sergei V. Chmutov oraz Sergei V. Duzhin. The Kontsevich integral. https://arxiv.org/abs/math/0501040, 2005.

[85] Sergei V. Chmutov, Sergei V. Duzhin oraz Sergei K. Lando. Vassiliev knot invariants. II. Intersection graph conjecture for trees. W *Singularities and bifurcations*, tom 21 *Adv. Soviet Math.*, strony 127–134. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[86] Sergei V. Chmutov, Sergei V. Duzhin oraz Sergei K. Lando. Vassiliev knot invariants. III. Forest algebra and weighted graphs. W *Singularities and bifurcations*, tom 21 *Adv. Soviet Math.*, strony 135–145. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[87] Sergei V. Chmutov, Sergei V. Duzhin oraz Jacob Mostovoy. *Introduction to Vassiliev knot invariants*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[88] Sergei V. Chmutov oraz Alexander N. Varchenko. Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from sl_2. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 36(1):153–178, 1997.

[89] Wei-Liang Chow. On the algebraical braid group. *Annals of Mathematics. Second Series*, 49:654–658, 1948.

[90] William E. Clark, Mohamed Elhamdadi, Masahico Saito oraz Timothy Yeatman. Quandle colorings of knots and applications. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 23(6):29, 2014.

[91] Thomas D. Cochran oraz William B. R. Lickorish. Unknotting information from 4-manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 297(1):125–142, 1986.

[92] Erin Colberg. A brief history of knot theory. https://www.math.ucla.edu/~radko/191.1.05w/erin.pdf, 2013.

[93] Anthony Conway. The Levine-Tristram signature: a survey. W *2019–20 MATRIX annals*, tom 4 *MATRIX Book Ser.*, strony 31–56. Springer, Cham, 2021.

[94] John H. Conway. An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. W *Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)*, strony 329–358. Pergamon, Oxford, 1970.

[95] Daryl Cooper. *Signature of surfaces in 3-manifolds and applications to knot and link cobordism*. Praca doktorska, University of Warwick, 1982.

[96] Daryl Cooper oraz William B. R. Lickorish. Mutations of links in genus 2 handlebodies. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127(1):309–314, 1999.

[97] Alexander Coward. Ordering the Reidemeister moves of a classical knot. *Algebraic & Geometric Topology*, 6:659–671, 2006.

[98] Alexander Coward oraz Marc Lackenby. Unknotting genus one knots. *Comment. Math. Helv.*, 86(2):383–399, 2011.

[99] Alissa S. Crans. *Lie 2-algebras*. Praca doktorska, University of California, Riverside, 2004.

[100] Peter R. Cromwell. Homogeneous links. *Journal of the London Mathematical Society. Second Series*, 39(3):535–552, 1989.

[101] Peter R. Cromwell. *Knots and links*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[102] Richard H. Crowell. Genus of alternating link types. *Annals of Mathematics. Second Series*, 69:258–275, 1959.

[103] Richard H. Crowell. Nonalternating links. *Illinois Journal of Mathematics*, 3:101–120, 1959.

[104] Richard H. Crowell oraz Ralph H. Fox. *Introduction to knot theory*. Ginn and Co., Boston, Mass., 1963.

[105] Marc Culler, Cameron McA. Gordon, John Luecke oraz Peter B. Shalen. Dehn surgery on knots. *Annals of Mathematics. Second Series*, 125(2):237–300, 1987.

[106] Oliver T. Dasbach. On the combinatorial structure of primitive Vassiliev invariants. III. A lower bound. *Communications in Contemporary Mathematics*, 2(4):579–590, 2000.

[107] Oliver T. Dasbach oraz Stefan Hougardy. Does the Jones polynomial detect unknottedness? *Experimental Mathematics*, 6(1):51–56, 1997.

[108] James F. Davis oraz Charles Livingston. Alexander polynomials of periodic knots. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 30(4):551–564, 1991.

[109] Max W. Dehn. Die beiden Kleeblattschlingen. *Mathematische Annalen*, 75(3):402–413, 1914.

[110] Max W. Dehn. Über kombinatorische Topologie. *Acta Mathematica*, 67(1):123–168, 1936.

[111] Patrick Dehornoy. Braid groups and left distributive operations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 345(1):115–150, 1994.

[112] Elizabeth Denne, Yuanan Diao oraz John M. Sullivan. Quadrisecants give new lower bounds for the ropelength of a knot. *Geometry and Topology*, 10:1–26, 2006.

[113] Yuanan Diao. The lower bounds of the lengths of thick knots. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 12(1):1–16, 2003.

[114] Yuanan Diao. The additivity of crossing numbers. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 13(7):857–866, 2004.

[115] Yuanan Diao, Claus Ernst, Attila Por oraz Uta Ziegler. The ropelengths of knots are almost linear in terms of their crossing numbers. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 28(14):64, 2019.

[116] Yuanan Diao, Claus Ernst oraz Xingxing Yu. Hamiltonian knot projections and lengths of thick knots. *Topology and its Applications*, 136(1-3):7–36, 2004.

[117] Miguel Dionísio oraz Pedro Lopes. Quandles at finite temperatures. II. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 12(8):1041–1092, 2003.

[118] Helmut Doll oraz Jim Hoste. A tabulation of oriented links. *Mathematics of Computation*, 57(196):747–761, 1991. Z dodatkiem mikrofiszki.

[119] Clifford H. Dowker oraz Morwen B. Thistlethwaite. Classification of knot projections. *Topology and its Applications*, 16(1):19–31, 1983.

[120] Nathan M. Dunfield, Stavros Garoufalidis, Alexander Shumakovitch oraz Morwen B. Thistlethwaite. Behavior of knot invariants under genus 2 mutation. *New York Journal of Mathematics*, 16:99–123, 2010.

[121] Joan L. Dyer. The algebraic braid groups are torsion-free: an algebraic proof. *Mathematische Zeitschrift*, 172(2):157–160, 1980.

[122] Mieczysław K. Dąbkowski oraz Józef H. Przytycki. Burnside obstructions to the Montesinos–Nakanishi 3–move conjecture. *Geometry and Topology*, 6:355–360, 2002.

[123] Shalom Eliahou, Louis H. Kauffman oraz Morwen B. Thistlethwaite. Infinite families of links with trivial Jones polynomial. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 42(1):155–169, 2003.

[124] Elsayed A. Elrifai. On stick number of knots and links. *Chaos, Solitons & Fractals*, 27(1):233–236, 2006.

[125] Claus Ernst oraz De Witt W. Sumners. The growth of the number of prime knots. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 102(2):303–315, 1987.

[126] Claus Ernst oraz De Witt W. Sumners. A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 108(3):489–515, 1990.

[127] Edward R. Fadell oraz Lee Neuwirth. Configuration spaces. *Mathematica Scandinavica*, 10:111–118, 1962.

[128] Edward R. Fadell oraz James M. Van Buskirk. The braid groups of E^2 and S^2. *Duke Mathematical Journal*, 29:243–257, 1962.

[129] Roger Fenn, Michael T. Greene, Dale Rolfsen, Colin P. Rourke oraz Bertold Wiest. Ordering the braid groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 191(1):49–74, 1999.

[130] Roger Fenn oraz Colin P. Rourke. Racks and links in codimension two. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 01(04):343–406, 1992.

[131] Charles D. Feustel oraz Wilbur Whitten. Groups and complements of knots. *Canadian Journal of Mathematics. Journal Canadien de Mathématiques*, 30(6):1284–1295, 1978.

[132] Ronald Fintushel oraz Ronald J. Stern. Constructing lens spaces by surgery on knots. *Mathematische Zeitschrift*, 175(1):33–51, 1980.

[133] Andreas Floer. Instanton homology, surgery, and knots. W *Geometry of low-dimensional manifolds, 1 (Durham, 1989)*, tom 150 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, strony 97–114. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[134] Ralph H. Fox. On the total curvature of some tame knots. *Annals of Mathematics. Second Series*, 52:258–260, 1950.

[135] Ralph H. Fox. On the complementary domains of a certain pair of inequivalent knots. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings. Series A*, 14:37–40, 1952.

[136] Ralph H. Fox. Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring. *Annals of Mathematics. Second Series*, 57:547–560, 1953.

[137] Ralph H. Fox. Free differential calculus. II. The isomorphism problem of groups. *Annals of Mathematics. Second Series*, 59:196–210, 1954.

[138] Ralph H. Fox. Free differential calculus. III. Subgroups. *Annals of Mathematics. Second Series*, 64:407–419, 1956.

[139] Ralph H. Fox. Free differential calculus. V. The Alexander matrices re-examined. *Annals of Mathematics. Second Series*, 71:408–422, 1960.

[140] Ralph H. Fox. Some problems in knot theory. W *Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)*, strony 168–176. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[141] Ralph H. Fox oraz John W. Milnor. Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots. *Osaka Mathematical Journal*, 3:257–267, 1966.

[142] John Franks oraz Robert F. Williams. Braids and the Jones polynomial. *Transactions of the American Mathematical Society*, 303(1):97–108, 1987.

[143] Michael H. Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 17(3):357–453, 1982.

[144] Michael H. Freedman, Zheng-Xu He oraz Zhenghan Wang. Möbius energy of knots and unknots. *Annals of Mathematics. Second Series*, 139(1):1–50, 1994.

[145] Michael H. Freedman oraz Richard Skora. Strange actions of groups on spheres. *Journal of Differential Geometry*, 25(1):75–98, 1987.

[146] Peter Freyd, David Yetter, Jim Hoste, William B. R. Lickorish, Kenneth C. Millett oraz Adrian Ocneanu. A new polynomial invariant of knots and links. *American Mathematical Society. Bulletin. New Series*, 12(2):239–246, 1985.

[147] Satoshi Fukuhama, Makoto Ozawa oraz Masakazu Teragaito. Genus one, three-bridge knots are pretzel. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 8(7):879–885, 1999.

[148] David Futer, Efstratia Kalfagianni oraz Jessica S. Purcell. A survey of hyperbolic knot theory. W *Knots, low-dimensional topology and applications*, tom 284 *Springer Proc. Math. Stat.*, strony 1–30. Springer, Cham, 2019.

[149] David Gabai. Genera of the arborescent links. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 59(339):1–98, 1986.

[150] David Gabai, Robert G. Meyerhoff oraz Peter Milley. Minimum volume cusped hyperbolic three-manifolds. *Journal of the American Mathematical Society*, 22(4):1157–1215, 2009.

[151] Jean-Marc Gambaudo oraz Étienne Ghys. Braids and signatures. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 133(4):541–579, 2005.

[152] Stavros Garoufalidis oraz Christoph Koutschan. The noncommutative A-polynomial of $(-2, 3, n)$ pretzel knots. *Experimental Mathematics*, 21(3):241–251, 2012.

[153] Frank A. Garside. The braid group and other groups. *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series*, 20:235–254, 1969.

[154] Florian Gellert. Kombinatorische Invarianten, 2009. Praca licencjacka napisana na uniwersytecie w Bonn, udostępniona jedynie w prywatnej korespondencji.

[155] Paolo Ghiggini. Knot Floer homology detects genus-one fibred knots. *American Journal of Mathematics*, 130(5):1151–1169, 2008.

[156] William Gibson oraz Masaharu Ishikawa. Links and Gordian numbers associated with generic immersions of intervals. *Topology and its Applications*, 123(3):609–636, 2002.

[157] Edgar N. Gilbert. Knots and classes of ménage permutations. *Scripta Mathematica*, 22:228–233, 1956.

[158] Cole A. Giller. A family of links and the Conway calculus. *Transactions of the American Mathematical Society*, 270(1):75–109, 1982.

[159] Patrick M. Gilmer oraz Charles Livingston. Signature jumps and Alexander polynomials for links. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 144(12):5407–5417, 2016.

[160] Lebrecht Goeritz. Knoten und quadratische Formen. *Mathematische Zeitschrift*, 36(1):647–654, 1933.

[161] Lebrecht Goeritz. Bemerkungen zur Knotentheorie. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 10(1):201–210, 1934.

[162] Jay R. Goldman oraz Louis H. Kauffman. Rational tangles. *Adv. in Appl. Math.*, 18(3):300–332, 1997.

[163] Robert E. Gompf. Smooth concordance of topologically slice knots. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 25(3):353–373, 1986.

[164] Robert E. Gompf, Martin G. Scharlemann oraz Abigail Thompson. Fibered knots and potential counterexamples to the property 2R and slice-ribbon conjectures. *Geometry & Topology*, 14(4):2305–2347, 2010.

[165] Juan González-Meneses. Basic results on braid groups. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, 18(1):15–59, 2011.

[166] Richard E. Goodrick. Two bridge knots are alternating knots. *Pacific Journal of Mathematics*, 40:561–564, 1972.

[167] Cameron McA. Gordon oraz Richard A. Litherland. On the signature of a link. *Inventiones Mathematicae*, 47(1):53–69, 1978.

[168] Cameron McA. Gordon, Richard A. Litherland oraz Kunio Murasugi. Signatures of covering links. *Canad. J. Math.*, 33(2):381–394, 1981.

[169] Cameron McA. Gordon oraz John Luecke. Only integral Dehn surgeries can yield reducible manifolds. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 102(1):97–101, 1987.

[170] Cameron McA. Gordon oraz John Luecke. Knots are determined by their complements. *Journal of the American Mathematical Society*, 2(2):371–415, 1989.

[171] Cameron McA. Gordon oraz John Luecke. Knots with unknotting number 1 and essential Conway spheres. *Algebraic & Geometric Topology*, 6:2051–2116, 2006.

[172] Joshua E. Greene. Alternating links and definite surfaces. *Duke Mathematical Journal*, 166(11):2133–2151, 2017.

[173] Joshua E. Greene oraz Stanislav Jabuka. The slice-ribbon conjecture for 3-stranded pretzel knots. *American Journal of Mathematics*, 133(3):555–580, 2011.

[174] Hermann Gruber. Estimates for the minimal crossing number. https://arxiv.org/abs/math/0303273, 2003.

[175] Charles Gunn oraz John M. Sullivan. The Borromean rings: a video about the new IMU logo. W *Bridges Leeuwarden: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, strony 63–70. Tarquin Publications, Londyn, 2008.

[176] Tobias J. Hagge. Every Reidemeister move is needed for each knot type. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134(1):295–301, 2006.

[177] Wolfgang Haken. Theorie der Normalflächen. *Acta Mathematica*, 105:245–375, 1961.

[178] Richard Hartley. Knots and involutions. *Mathematische Zeitschrift*, 171(2):175–185, 1980.

[179] Richard Hartley oraz Akio Kawauchi. Polynomials of amphicheiral knots. *Mathematische Annalen*, 243(1):63–70, 1979.

[180] Mary G. Haseman. *On knots, with a census of the amphicheirals with twelve crossings*. Praca doktorska, Bryn Mawr College, 1918.

[181] Yoko Hashizume. On the uniqueness of the decomposition of a link. *Osaka Mathematical Journal*, 10:283–300, 1958.

[182] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[183] Chuichiro Hayashi. The number of Reidemeister moves for splitting a link. *Mathematische Annalen*, 332(2):239–252, 2005.

[184] Hugh M. Hilden, José M. Montesinos, Débora M. Tejada oraz Margarita M. Toro. On the classification of 3-bridge links. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 46(2):113–144, 2012.

[185] Jonathan A. Hillman. The Torres conditions are insufficient. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 89(1):19–22, 1981.

[186] Jonathan A. Hillman, Charles Livingston oraz Swatee Naik. Twisted alexander polynomials of periodic knots. *Algebraic & Geometric Topology*, 6:145–169, 2006.

[187] Friedrich Hirzebruch. Singularities and exotic spheres. *Séminaire Bourbaki*, 314:1–20, 1968.

[188] Chi-Fai Ho. *On polynomial invariants for knots and links*. Praca doktorska, California Institute of Technology, 1986.

[189] Craig Hodgson oraz Hidetoshi Masai. On the number of hyperbolic 3-manifolds of a given volume. W *Geometry and topology down under*, tom 597 *Contemp. Math.*, strony 295–320. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

[190] Fujitsugu Hosokawa. On ∇-polynomials of links. *Osaka Mathematical Journal*, 10:273–282, 1958.

[191] Jim Hoste, Morwen B. Thistlethwaite oraz Jeffrey Weeks. The first 1,701,936 knots. *The Mathematical Intelligencer*, 20(4):33–48, 1998.

[192] Jim Hoste oraz Laura Zirbel. Lissajous knots and knots with Lissajous projections. https://arxiv.org/abs/math/0605632, 2006.

[193] Youngsik Huh oraz Seungsang Oh. An upper bound on stick number of knots. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 20(5):741–747, 2011.

[194] Slavik V. Jablan. Unknotting number and ∞-unknotting number of a knot. *Univerzitet u Nišu. Prirodno-Matematički Fakultet. Filomat*, (12, część 1):113–120, 1998.

[195] Slavik V. Jablan. Geometry of links. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 29(3):121–139, 1999.

[196] Stanislav Jabuka. Rational Witt classes of pretzel knots. *Osaka Journal of Mathematics*, 47(4):977–1027, 2010.

[197] Stanislav Jabuka oraz Swatee Naik. Periodic knots and Heegard Floer correction terms. *Journal of the European Mathematical Society*, 18(8):1651–1674, 2016.

[198] William H. Jaco oraz Peter B. Shalen. Seifert fibered spaces in 3-manifolds. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 21(220):viii+192, 1979.

[199] Agnieszka Janiak-Osajca oraz Zdzisław Pogoda. Węzły, supły i ułamki. *MSN*, 33:31–35, 2004.

[200] Boju Jiang. A simple proof that the concordance group of algebraically slice knots is infinitely generated. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 83(1):189–192, 1981.

[201] Gyo T. Jin. Polygon indices and superbridge indices of torus knots and links. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 6(2):281–289, 1997.

[202] Klaus Johannson. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, tom 761 *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.

[203] Vaughan F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 12(1):103–111, 1985.

[204] Vaughan F. R. Jones oraz Józef H. Przytycki. Lissajous knots and billiard knots. W *Knot theory (Warsaw, 1995)*, tom 42 *Banach Center Publ.*, strony 145–163. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warszawa, 1998.

[205] Taizo Kanenobu. Module d'Alexander des nœuds fibrés et polynôme de Hosokawa des lacements fibrés. *Kobe University. Mathematics Seminar Notes*, 9(1):75–84, 1981.

[206] Taizo Kanenobu. Infinitely many knots with the same polynomial invariant. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 97(1):158–162, 1986.

[207] Taizo Kanenobu. Relations between the Jones and Q polynomials for 2-bridge and 3-braid links. *Mathematische Annalen*, 285(1):115–124, 1989.

[208] Taizo Kanenobu oraz Hitoshi Murakami. Two-bridge knots with unknotting number one. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 98(3):499–502, 1986.

[209] Rinat M. Kashaev. The hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm. https://arxiv.org/abs/q-alg/9601025, 1996.

[210] Christian Kassel oraz Vladimir G. Turaev. *Braid groups*, tom 247 *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Nowy Jork, 2008.

[211] Louis H. Kauffman. *Formal knot theory*, tom 30 *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.

[212] Louis H. Kauffman. State models and the Jones polynomial. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 26(3):395–407, 1987.

[213] Louis H. Kauffman. An invariant of regular isotopy. *Transactions of the American Mathematical Society*, 318(2):417–471, 1990.

[214] Louis H. Kauffman. *Knots and physics*, tom 1 *Series on Knots and Everything*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1991.

[215] Louis H. Kauffman. Knot logic. W *Knots and applications*, tom 6 *Ser. Knots Everything*, strony 1–110. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.

[216] Louis H. Kauffman oraz Sofia Lambropoulou. On the classification of rational tangles. *Adv. in Appl. Math.*, 33(2):199–237, 2004.

[217] Akio Kawauchi. The invertibility problem on amphicheiral excellent knots. *Proceedings of the Japan Academy*, 55:399–402, 1979.

[218] Akio Kawauchi. On coefficient polynomials of the skein polynomial of an oriented link. *Kobe Journal of Mathematics*, 11(1):49–68, 1994.

[219] Akio Kawauchi. *A survey of knot theory*. Birkhäuser Verlag, Bazylea, 1996.

[220] Michel A. Kervaire. On higher dimensional knots. W *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, strony 105–119. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965.

[221] Mikhail Khovanov. A categorification of the Jones polynomial. *Duke Math. J.*, 101(3):359–426, 2000.

[222] Mark E. Kidwell. On the degree of the Brandt-Lickorish-Millett-Ho polynomial of a link. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 100(4):755–762, 1987.

[223] Paik-Kee Kim oraz Jeffrey L. Tollefson. Splitting the PL involutions of nonprime 3-manifolds. *Michigan Mathematical Journal*, 27(3):259–274, 1980.

[224] Se-Goo Kim oraz Charles Livingston. Knot mutation: 4-genus of knots and algebraic concordance. *Pacific Journal of Mathematics*, 220(1):87–105, 2005.

[225] Shinichi Kinoshita oraz Hidetaka Terasaka. On unions of knots. *Osaka Mathematical Journal*, 9:131–153, 1957.

[226] Rob Kirby. Problems in low dimensional manifold theory. http://www.math.berkeley.edu/~kirby/problems.ps.gz, 1995. Na podstawie wcześniejszej papierowej pracy z 1976/1978 roku, opublikowanej w Algebraic and geometric topology (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, tom 23, część 2: strony 273–312).

[227] Paul A. Kirk. Mutations of homology spheres and Casson's invariant. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 105(2):313–318, 1989.

[228] Alexander R. Klotz oraz Matthew Maldonado. The ropelength of complex knots. *Journal of Physics. A. Mathematical and Theoretical*, 54(44):18, 2021.

[229] Jan A. Kneissler. The number of primitive Vassiliev invariants up to degree 12. https://arxiv.org/abs/q-alg/9706022, 1997.

[230] Martin Kneser oraz Dieter Puppe. Quadratische Formen und Verschlingungsinvarianten von Knoten. *Mathematische Zeitschrift*, 58:376–384, 1953.

[231] Masako Kobayashi oraz Tsuyoshi Kobayashi. On canonical genus and free genus of knot. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 5(1):77–85, 1996.

[232] Tsuyoshi Kobayashi. Fibered links and unknotting operations. *Osaka Journal of Mathematics*, 26(4):699–742, 1989.

[233] Tsuyoshi Kobayashi. Minimal genus Seifert surfaces for unknotting number 1 knots. *Kobe Journal of Mathematics*, 6(1):53–62, 1989.

[234] Kouzi Kodama oraz Makoto Sakuma. Symmetry groups of prime knots up to 10 crossings. W *Knots 90 (Osaka, 1990)*, strony 323–340. de Gruyter, Berlin, 1992.

[235] Peter D. Kohn. Two-bridge links with unlinking number one. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 113(4):1135–1147, 1991.

[236] Peter D. Kohn. Unlinking two component links. *Osaka Journal of Mathematics*, 30(4):741–752, 1993.

[237] Toshitake Kohno. Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations. *Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier*, 37(4):139–160, 1987.

[238] Sudipta Kolay. Knot colorings: Coloring and Goeritz matrices. https://arxiv.org/abs/1910.08044, 2019.

[239] Hisako Kondo. Knots of unknotting number 1 and their Alexander polynomials. *Osaka Mathematical Journal*, 16(2):551–559, 1979.

[240] Maxim Kontsevich. Vassiliev's knot invariants. W *I. M. Gelfand Seminar*, tom 16 *Advances in Soviet mathematics*, strony 137–150. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[241] Pierre V. Koseleff oraz Daniel Pecker. Every knot is a billiard knot. W *Knots in Poland. III. Part 1*, tom 100 *Banach Center Publ.*, strony 173–178. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warszawa, 2014.

[242] Daan Krammer. The braid group B_4 is linear. *Inventiones Mathematicae*, 142(3):451–486, 2000.

[243] Daan Krammer. Braid groups are linear. *Annals of Mathematics. Second Series*, 155(1):131–156, 2002.

[244] Peter B. Kronheimer oraz Tomasz S. Mrowka. Gauge theory for embedded surfaces. I. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 32(4):773–826, 1993.

[245] Peter B. Kronheimer oraz Tomasz S. Mrowka. Gauge theory for embedded surfaces. II. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 34(1):37–97, 1995.

[246] Peter B. Kronheimer oraz Tomasz S. Mrowka. Khovanov homology is an unknot-detector. *Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques*, 113(1):97–208, 2011.

[247] Greg Kuperberg. How hard is it to approximate the Jones polynomial? *Theory of Computing. An Open Access Journal*, 11:183–219, 2015.

[248] Roger H. Kyle. Branched covering spaces and the quadratic forms of links. *Annals of Mathematics. Second Series*, 59:539–548, 1954.

[249] Marc Lackenby. Surfaces, surgery and unknotting operations. *Mathematische Annalen*, 308(4):615–632, 1997.

[250] Marc Lackenby. The crossing number of composite knots. *J. Topol.*, 2(4):747–768, 2009.

[251] Marc Lackenby. The crossing number of satellite knots. *Algebraic & Geometric Topology*, 14(4):2379–2409, 2014.

[252] Marc Lackenby. A polynomial upper bound on Reidemeister moves. *Annals of Mathematics. Second Series*, 182(2):491–564, 2015.

[253] Sofia Lambropoulou oraz Colin P. Rourke. Markov's theorem in 3-manifolds. *Topology and its Applications*, 78(1-2):95–122, 1997.

[254] Christoph Lamm. There are infinitely many Lissajous knots. *Manuscripta Mathematica*, 93(1):29–37, 1997.

[255] Christoph Lamm. The search for nonsymmetric ribbon knots. *Experimental Mathematics*, 30(3):349–363, 2021.

[256] Christoph Lamm oraz Daniel Obermeyer. Billiard knots in a cylinder. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 08(03):353–366, 1999.

[257] Jean Lannes. Sur l'invariant de Kervaire des nœuds classiques. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 60(2):179–192, 1985.

[258] Jerome Levine. Knot cobordism groups in codimension two. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 44:229–244, 1969.

[259] Jerome Levine. An algebraic classification of some knots of codimension two. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 45:185–198, 1970.

[260] William B. R. Lickorish. The unknotting number of a classical knot. W *Combinatorial methods in topology and algebraic geometry (Rochester, N.Y., 1982)*, tom 44 *Contemp. Math.*, strony 117–121. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.

[261] William B. R. Lickorish. *An introduction to knot theory*, tom 175 *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Nowy Jork, 1997.

[262] William B. R. Lickorish oraz Andrew S. Lipson. Polynomials of 2-cable-like links. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 100(2):355–361, 1987.

[263] William B. R. Lickorish oraz Kenneth C. Millett. Some evaluations of link polynomials. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 61(3):349–359, 1986.

[264] William B. R. Lickorish oraz Kenneth C. Millett. A polynomial invariant of oriented links. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 26(1):107–141, 1987.

[265] William B. R. Lickorish oraz Kenneth C. Millett. The new polynomial invariants of knots and links. *Mathematics Magazine*, 61(1):3–23, 1988.

[266] William B. R. Lickorish oraz Morwen B. Thistlethwaite. Some links with nontrivial polynomials and their crossing-numbers. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 63(4):527–539, 1988.

[267] Livio Liechti. Signature, positive Hopf plumbing and the Coxeter transformation. *Osaka Journal of Mathematics*, 53(1):251–266, 2016.

[268] Xiao-Song Lin oraz Zhenghan Wang. Integral geometry of plane curves and knot invariants. *Journal of Differential Geometry*, 44(1):74–95, 1996.

[269] Andrew S. Lipson. An evaluation of a link polynomial. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 100(2):361–364, 1986.

[270] Paolo Lisca. Lens spaces, rational balls and the ribbon conjecture. *Geometry & Topology*, 11:429–472, 2007.

[271] Johann B. Listing. *Vorstudien zur Topologie*. Vandenhoeck und Ruprecht, 1847.

[272] Richard A. Litherland. Signatures of iterated torus knots. W *Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977)*, tom 722 *Lecture Notes in Math.*, strony 71–84. Springer, Berlin, 1979.

[273] Charles Livingston. Knots which are not concordant to their reverses. *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series*, 34(135):323–328, 1983.

[274] Charles Livingston. *Knot theory*, tom 24 *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Waszyngton, DC, 1993.

[275] Charles Livingston. Order 2 algebraically slice knots. W *Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998)*, tom 2 *Geom. Topol. Monogr.*, strony 335–342. Geom. Topol. Publ., Coventry, 1999.

[276] Charles Livingston. Signature functions of knots. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 146(10):4513–4520, 2018.

[277] Charles Livingston oraz Allison H. Moore. KnotInfo: Table of knot invariants. URL: knotinfo.math.indiana.edu, 2024.

[278] Charles Livingston oraz Allison H. Moore. LinkInfo: Table of link invariants. URL: linkinfo.math.indiana.edu, 2024.

[279] Darren D. Long oraz Mark Paton. The Burau representation is not faithful for $n \geq 6$. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 32(2):439–447, 1993.

[280] Adam M. Lowrance oraz Dean Spyropoulos. The Jones polynomial of an almost alternating link. *New York Journal of Mathematics*, 23(1):1611–1639, 2017.

[281] Wilhelm Magnus. Über Automorphismen von Fundamentalgruppen berandeter Flächen. *Mathematische Annalen*, 109(1):617–646, 1934.

[282] Wilhelm Magnus, Abraham Karrass oraz Donald Solitar. *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*. Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], Nowy Jork-Londyn-Sydney, 1966.

[283] Wilhelm Magnus oraz Ada Peluso. On a theorem of V. I. Arnold. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 22:683–692, 1969.

[284] Andrei V. Malyutin. On the question of genericity of hyperbolic knots. https://arxiv.org/abs/1612.03368, 2016.

[285] Andrei V. Malyutin. Hyperbolic links are not generic. https://arxiv.org/abs/1907.04458, 2019.

[286] Vassily O. Manturov. A combinatorial representation of links by quasitoric braids. *European Journal of Combinatorics*, 23(2):207–212, 2002.

[287] Vassily O. Manturov. *Knot theory*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[288] Julien Marché. A computation of the Kontsevich integral of torus knots. *Algebraic & Geometric Topology*, 4:1155–1175, 2004.

[289] Andrei A. Markov. Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe. *Recueil Mathématique*, 1:73–78, 1935. Dostępne tłumaczenie rosyjskie: О свободной эквивалентности замкнутых кос.

[290] Gregor Masbaum oraz Pierre Vogel. 3-valent graphs and the Kauffman bracket. *Pacific Journal of Mathematics*, 164(2):361–381, 1994.

[291] Sergei V. Matveev oraz Aanatoly T. Fomenko. Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий. *Академия Наук СССР и Московское Математическое Общество. Успехи математических наук*, 43(1):5–22, 1988. Dostępne tłumaczenie angielskie: Constant energy surfaces of Hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic manifolds).

[292] Cynthia L. McCabe. An upper bound on edge numbers of 2-bridge knots and links. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 7(6):797–805, 1998.

[293] Paul M. Melvin oraz Hugh R. Morton. The coloured Jones function. *Communications in Mathematical Physics*, 169(3):501–520, 1995.

[294] William W. Menasco. Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements. *Topology*, 23(1):37–44, 1984.

[295] William W. Menasco oraz Morwen B. Thistlethwaite. The classification of alternating links. *Annals of Mathematics. Second Series*, 138(1):113–171, 1993.

[296] John W. Milnor. Link groups. *Annals of Mathematics. Second Series*, 59(2):177–195, 1954.

[297] John W. Milnor. Most knots are wild. *Fundamenta Mathematicae*, 54(3):335–338, 1964.

[298] John W. Milnor. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, tom 61 *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1969.

[299] Yasuyuki Miyazawa. The Jones polynomial of an unknotting number one knot. *Topology and its Applications*, 83(3):161–167, 1998.

[300] Yasuyuki Miyazawa. Links with trivial Q-polynomial. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 71(1):19–42, 2019.

[301] José M. Montesinos. Seifert manifolds that are ramified two-sheeted cyclic coverings. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Segunda Serie*, 18:1–32, 1973.

[302] José M. Montesinos. Surgery on links and double branched covers of S^3. W *Knots, groups, and 3-manifolds (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox)*, strony 227–259. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1975.

[303] John A. Moody. The Burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n. *American Mathematical Society. Bulletin. New Series*, 25(2):379–384, 1991.

[304] John W. Morgan oraz Hyman Bass. *The Smith conjecture*, tom 112 *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984.

[305] Yoav Moriah. On the free genus of knots. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 99(2):373–379, 1987.

[306] Hugh R. Morton. Fibred knots with a given alexander polynomial. *Monographs of L'Enseignement Mathématique*, 1983.

[307] Hugh R. Morton. Seifert circles and knot polynomials. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 99(1):107–109, 1986.

[308] Hugh R. Morton. Threading knot diagrams. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 99(2):247–260, 1986.

[309] Hugh R. Morton. Polynomials from braids. W *Braids (Santa Cruz, CA, 1986)*, tom 78 *Contemp. Math.*, strony 575–585. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[310] Hugh R. Morton oraz Peter R. Cromwell. Distinguishing mutants by knot polynomials. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 5(2):225–238, 1996.

[311] Hugh R. Morton oraz Paweł Traczyk. The Jones polynomial of satellite links around mutants. W *Braids (Santa Cruz, CA, 1986)*, tom 78 *Contemp. Math.*, strony 587–592. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[312] George D. Mostow. *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, tom 78 *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokio, 1973.

[313] Kimihiko Motegi. Knot types of satellite knots and twisted knots. W *Lectures at KNOTS '96 (Tokyo)*, tom 15 *Ser. Knots Everything*, strony 73–93. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.

[314] Hitoshi Murakami. A recursive calculation of the Arf invariant of a link. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 38(2):335–338, 1986.

[315] Hitoshi Murakami. Algebraic unknotting operation. *Questions and Answers in General Topology*, 8(1):283–292, 1990.

[316] Hitoshi Murakami oraz Akira Yasuhara. Four-genus and four-dimensional clasp number of a knot. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 128(12):3693–3699, 2000.

[317] Jun Murakami. Finite type invariants detecting the mutant knots. https://www.f.waseda.jp/murakami/papers/finitetype.pdf, 1999.

[318] Kunio Murasugi. On the Alexander polynomial of the alternating knot. *Osaka Mathematical Journal*, 10:181–189, 1958.

[319] Kunio Murasugi. On the genus of the alternating knot. I, II. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 10:94–105, 235–248, 1958.

[320] Kunio Murasugi. Remarks on torus knots. *Proceedings of the Japan Academy*, 37:222, 1961.

[321] Kunio Murasugi. On a certain numerical invariant of link types. *Transactions of the American Mathematical Society*, 117:387–422, 1965.

[322] Kunio Murasugi. The Arf invariant for knot types. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 21:69–72, 1969.

[323] Kunio Murasugi. On periodic knots. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 46:162–174, 1971.

[324] Kunio Murasugi. On the Alexander polynomial of alternating algebraic knots. *Australian Mathematical Society. Journal. Series A. Pure Mathematics and Statistics*, 39(3):317–333, 1985.

[325] Kunio Murasugi. Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 26(2):187–194, 1987.

[326] Kunio Murasugi. An estimate of the bridge index of links. *Kobe Journal of Mathematics*, 5(1):75–86, 1988.

[327] Kunio Murasugi. On the braid index of alternating links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 326(1):237–260, 1991.

[328] Kunio Murasugi. *Knot theory and its applications*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[329] Chad Musick. Minimal bridge projections for 11-crossing prime knots. https://arxiv.org/abs/1208.4233, 2012.

[330] Swatee Naik. New invariants of periodic knots. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 122(2):281–290, 1997.

[331] Takuji Nakamura. On the crossing number of 2-bridge knot and the canonical genus of its Whitehead double. *Osaka Journal of Mathematics*, 43(3):609–623, 2006.

[332] Yasutaka Nakanishi. A note on unknotting number. *Kobe University. Mathematics Seminar Notes*, 9(1):99–108, 1981.

[333] Yasutaka Nakanishi. Unknotting numbers and knot diagrams with the minimum crossings. *Kobe University. Mathematics Seminar Notes*, 11(2):257–258, 1983.

[334] Yasutaka Nakanishi. Union and tangle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(5):1625–1631, 1996.

[335] Yasutaka Nakanishi. A note on unknotting number. II. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 14(1):3–8, 2005.

[336] Seiya Negami. Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 324(2):527–541, 1991.

[337] Sam Nelson. What is ...a quandle? *Notices of the American Mathematical Society*, 63(4):378–380, 2016.

[338] Sam Nelson, Natsumi Oyamaguchi oraz Radmila Sazdanović. Psyquandles, singular knots and pseudoknots. *Tokyo Journal of Mathematics*, 42(2):405–429, 2019.

[339] Walter D. Neumann oraz Don Zagier. Volumes of hyperbolic three-manifolds. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 24(3):307–332, 1985.

[340] Lee Neuwirth. A note on torus knots and links determined by their groups. *Duke Mathematical Journal*, 28:545–551, 1961.

[341] Ka Y. Ng. Groups of ribbon knots. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 37(2):441–458, 1998.

[342] Maciej Niebrzydowski oraz Józef H. Przytycki. The quandle of the trefoil knot as the Dehn quandle of the torus. *Osaka Journal of Mathematics*, 46(3):645–659, 2009.

[343] Ulrich Oertel. Closed incompressible surfaces in complements of star links. *Pacific Journal of Mathematics*, 111(1):209–230, 1984.

[344] Tomotada Ohtsuki. Problems on invariants of knots and 3-manifolds. W *Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001)*, tom 4 *Geom. Topol. Monogr.*, strony 377–572. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.

[345] Yoshiyuki Ohyama. On the minimal crossing number and the braid index of links. *Canadian Journal of Mathematics. Journal Canadien de Mathématiques*, 45(1):117–131, 1993.

[346] Yoshiyuki Ohyama. Vassiliev invariants and similarity of knots. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123(1):287–291, 1995.

[347] Tokio Oshikiri, Ayaka Shimizu oraz Junya Tamura. Region crossing change on origami and link. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 33(07):2450019, 2024.

[348] Brendan Owens. Unknotting information from Heegaard Floer homology. *Advances in Mathematics*, 217(5):2353–2376, 2008.

[349] Peter Ozsváth oraz Zoltán Szabó. Heegaard Floer homology and alternating knots. *Geometry and Topology*, 7:225–254, 2003.

[350] Peter Ozsváth oraz Zoltán Szabó. Knot Floer homology and the four-ball genus. *Geometry and Topology*, 7:615–639, 2003.

[351] Peter Ozsváth oraz Zoltán Szabó. Knots with unknotting number one and Heegaard Floer homology. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 44(4):705–745, 2005.

[352] Daniel Pecker. Poncelet's theorem and billiard knots. *Geometriae Dedicata*, 161:323–333, 2012.

[353] Kenneth A. Perko. On the classification of knots. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45(2):262–266, 1974.

[354] Kenneth A. Perko. Octahedral knot covers. W *Knots, groups, and 3-manifolds (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox)*, strony 47–50. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokio, 1975.

[355] Kenneth A. Perko. Invariants of 11-crossing knots. *Astérisque*, 1980.

[356] Kenneth A. Perko. Primality of certain knots. *Topology Proceedings*, 7(1):109–118, 1982.

[357] Kenneth A. Perko. Historical highlights of non-cyclic knot theory. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 25(03):1640010, 2016.

[358] Carlo Petronio oraz Adolfo Zanellati. Algorithmic simplification of knot diagrams: New moves and experiments. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 25(10):1–30, 2016.

[359] Lisa Piccirillo. The Conway knot is not slice. *Annals of Mathematics. Second Series*, 191(2):581–591, 2020.

[360] Wojciech Politarczyk. Equivariant jones polynomials of periodic links. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 26(03):1741007, 2017.

[361] Michael Polyak. Minimal generating sets of Reidemeister moves. *Quantum Topology*, 4(1):399–411, 2010.

[362] Michael Polyak oraz Oleg J. Viro. On the Casson knot invariant. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 10(5):711–738, 2001. Knots in Hellas '98, tom 3 (Delphi).

[363] Gopal Prasad. Strong rigidity of $\mathbb{Q}$-rank 1 lattices. *Inventiones Mathematicae*, 21:255–286, 1973.

[364] Victor V. Prasolov oraz Alexei B. Sossinsky. *Knots, links, braids and 3-manifolds*, tom 154 *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[365] Józef H. Przytycki. Equivalence of cables of mutants of knots. *Canadian Journal of Mathematics. Journal Canadien de Mathématiques*, 41(2):250–273, 1989.

[366] Józef H. Przytycki. On Murasugi's and Traczyk's criteria for periodic links. *Mathematische Annalen*, 283(3):465–478, 1989.

[367] Józef H. Przytycki. *Węzły*. Script, 1995.

[368] Józef H. Przytycki. 3-coloring and other elementary invariants of knots. W *Knot theory (Warsaw, 1995)*, tom 42 *Banach Center Publ.*, strony 275–295. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warszawa, 1998.

[369] Józef H. Przytycki. From Goeritz matrices to quasi-alternating links. W *The mathematics of knots*, tom 1 *Contrib. Math. Comput. Sci.*, strony 257–316. Springer, Heidelberg, 2011.

[370] Józef H. Przytycki. Przygody badacza węzłów: od 3-kolorowań Foxa do homologii operatora Yanga-Baxtera z wielomianem Jonesa i homologiami Chowanowa w tle, 2015. Praca dostępna dawniej w internecie, obecnie niedostępna.

[371] Józef H. Przytycki oraz Paweł Traczyk. Conway algebras and skein equivalence of links. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 100(4):744–748, 1987.

[372] Jessica S. Purcell. *Hyperbolic Knot Theory*, tom 209 *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2020.

[373] Câm V. Quach. Polynôme d'alexander des nœuds fibrés. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1979.

[374] Richard Randell. An elementary invariant of knots. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 3(3):279–286, 1994.

[375] Richard Randell. Invariants of piecewise-linear knots. W *Knot theory (Warsaw, 1995)*, tom 42 *Banach Center Publ.*, strony 307–319. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warszawa, 1998.

[376] Stuart Rankin, Ortho Flint oraz John Schermann. Enumerating the prime alternating knots. I. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 13(1):57–100, 2004.

[377] Jacob A. Rasmussen. Khovanov homology and the slice genus. *Inventiones Mathematicae*, 182:419–447, 2010.

[378] Kurt W. Reidemeister. Elementare Begründung der Knotentheorie. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 5(1):24–32, 1927.

[379] Kurt W. Reidemeister. *Knotentheorie*, tom 1 *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, 1932.

[380] Kurt W. Reidemeister. Homotopieringe und Linsenräume. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 11(1):102–109, 1935.

[381] Robert Riley. Homomorphisms of knot groups on finite groups. *Mathematics of Computation*, 25:603–619, 1971.

[382] Robert Riley. A quadratic parabolic group. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 77:281–288, 1975.

[383] Robert Riley. An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structures. W *Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977)*, tom 722 *Lecture Notes in Math.*, strony 99–133. Springer, Berlin, 1979.

[384] Raymond A. Robertello. An invariant of knot cobordism. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 18:543–555, 1965.

[385] Dale Rolfsen. *Knots and links*, tom 7 *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif., 1976.

[386] Dale Rolfsen. The quest for a knot with trivial Jones polynomial: diagram surgery and the Temperley-Lieb algebra. W *Topics in knot theory (Erzurum, 1992)*, tom 399 *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, strony 195–210. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.

[387] Yongwu Rong. Mutation and Witten invariants. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 33(3):499–507, 1994.

[388] Pierre Rosenstiehl oraz Ronald C. Read. On the principal edge tripartition of a graph. *Annals of Discrete Mathematics*, 3:195–226, 1978.

[389] Daniel Ruberman. Mutation and volumes of knots in S^3. *Inventiones Mathematicae*, 90(1):189–215, 1987.

[390] Daniel Ruberman. Mutation and gauge theory. I. Yang-Mills invariants. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 74(4):615–641, 1999.

[391] Tsuyoshi Sakai. A remark on the Alexander polynomials of knots. *Kobe University. Mathematics Seminar Notes*, 5(3):451–456, 1977.

[392] Tsuyoshi Sakai. Polynomials of invertible knots. *Mathematische Annalen*, 266(2):229–232, 1983.

[393] Makoto Sakuma. A survey of the impact of Thurston's work on knot theory. W *In the tradition of Thurston*, strony 67–160. Springer, Cham, 2020.

[394] Martin G. Scharlemann. Unknotting number one knots are prime. *Invent. Math.*, 82(1):37–55, 1985.

[395] Martin G. Scharlemann. Crossing changes. *Chaos, Solitons & Fractals*, 9(4-5):693–704, 1998.

[396] Martin G. Scharlemann oraz Abigail Thompson. Unknotting number, genus, and companion tori. *Mathematische Annalen*, 280(2):191–205, 1988.

[397] Nathaniel B. Schieber. A computational approach to tangles, 2018. Praca licencjacka.

[398] Otto Schreier. Über die Gruppen $A^a B^b = 1$. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 3(1):167–169, 1924.

[399] Horst Schubert. Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten. *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematische-Naturwissenschaftliche Klasse*, 1949(3):57–104, 1949.

[400] Horst Schubert. Knoten und Vollringe. *Acta Mathematica*, 90:131–286, 1953.

[401] Horst Schubert. Über eine numerische Knoteninvariante. *Math. Z.*, 61:245–288, 1954.

[402] Horst Schubert. Knoten mit zwei Brücken. *Math. Z.*, 65:133–170, 1956.

[403] Horst Schubert. Bestimmung der Primfaktorzerlegung von Verkettungen. *Mathematische Zeitschrift*, 76:116–148, 1961.

[404] Jennifer Schultens. Additivity of bridge numbers of knots. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 135(3):539–544, 2003.

[405] Herbert K. Seifert. Verschlingungsinvarianten. *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Physikalisch-Mathematische Klasse*, 1(26–29):811–828, 1933.

[406] Herbert K. Seifert. Über das Geschlecht von Knoten. *Mathematische Annalen*, 110(1):571–592, 1935.

[407] Herbert K. Seifert. On the homology invariants of knots. *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series*, 1:23–32, 1950.

[408] Ayaka Shimizu. Region crossing change is an unknotting operation. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 66(3):693–708, 2014.

[409] Yaichi Shinohara. On the signature of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 156:273–285, 1971.

[410] Clayton Shonkwiler. All prime knots through 10 crossings have superbridge index $\leqslant 5$. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 31(04):2250023, 2022.

[411] Alexander Shumakovitch. Khovanov homology theories and their applications. W *Perspectives in analysis, geometry, and topology*, tom 296 *Progr. Math.*, strony 403–430. Birkhäuser/Springer, Nowy Jork, 2012.

[412] Ted Stanford. Braid commutators and Vassiliev invariants. *Pacific Journal of Mathematics*, 174(1):269–276, 1996.

[413] John Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag, Nowy Jork, 1993.

[414] Alexander Stoimenow. Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 7(1):93–114, 1998.

[415] Alexander Stoimenow. Rational knots and a theorem of Kanenobu. *Experimental Mathematics*, 9(3):473–478, 2000.

[416] Alexander Stoimenow. On finiteness of Vassiliev invariants and a proof of the Lin-Wang conjecture via braiding polynomials. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 10(5):769–780, 2001. Knots in Hellas '98, tom 3 (Delphi).

[417] Alexander Stoimenow. Some examples related to 4-genera, unknotting numbers and knot polynomials. *Journal of the London Mathematical Society. Second Series*, 63(2):487–500, 2001.

[418] Alexander Stoimenow. Branched cover homology and $\mathbb{Q}$ evaluations. *Osaka Journal of Mathematics*, 39(1):13–21, 2002.

[419] Alexander Stoimenow. On the crossing number of positive knots and braids and braid index criteria of Jones and Morton-Williams-Franks. *Transactions of the American Mathematical Society*, 354(10):3927–3954, 2002.

[420] Alexander Stoimenow. Positive knots, closed braids and the Jones polynomial. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V*, 2(2):237–285, 2003.

[421] Alexander Stoimenow. On the number of links and link polynomials. *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series*, 55?(55?):87–98, 2004.

[422] Alexander Stoimenow. Polynomial values, the linking form and unknotting numbers. *Mathematical Research Letters*, 11(5-6):755–769, 2004.

[423] Alexander Stoimenow. Square numbers, spanning trees and invariants of achiral knots. *Communications in Analysis and Geometry*, 13(3):591–631, 2005.

[424] Alexander Stoimenow. Non-triviality of the Jones polynomial and the crossing numbers of amphicheiral knots. https://arxiv.org/abs/math/0606255, 2007.

[425] Alexander Stoimenow. Knots of (canonical) genus two. *Fundamenta Mathematicae*, 200(1):1–67, 2008.

[426] Alexander Stoimenow. Tabulating and distinguishing mutants. *International Journal of Algebra and Computation*, 20(4):525–559, 2010.

[427] Alexander Stoimenow. Coefficients and non-triviality of the Jones polynomial. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 657(1):1–55, 2011.

[428] Alexander Stoimenow oraz Toshifumi Tanaka. Mutation and the colored Jones polynomial. *Journal of Gökova Geometry Topology. GGT*, 3:44–78, 2009.

[429] Carl Sundberg oraz Morwen B. Thistlethwaite. The rate of growth of the number of prime alternating links and tangles. *Pacific Journal of Mathematics*, 182(2):329–358, 1998.

[430] Toshifumi Tanaka. Unknotting numbers of quasipositive knots. *Topology and its Applications*, 88(3):239–246, 1998.

[431] Kouki Taniyama. Unknotting numbers of diagrams of a given nontrivial knot are unbounded. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 18(8):1049–1063, 2009.

[432] Morwen B. Thistlethwaite. A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 26(3):297–309, 1987.

[433] Morwen B. Thistlethwaite. On the Kauffman polynomial of an adequate link. *Inventiones Mathematicae*, 93(2):285–296, 1988.

[434] Morwen B. Thistlethwaite. Links with trivial Jones polynomial. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 10(4):641–643, 2001.

[435] William P. Thurston. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *American Mathematical Society. Bulletin. New Series*, 6(3):357–381, 1982.

[436] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, tom 35 *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

[437] William P. Thurston. The Geometry and Topology of Three-Manifolds. http://library.msri.org/books/gt3m/, 2002.

[438] Heinrich F. F. Tietze. Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 19(1):1–118, 1908.

[439] Guillermo Torres. On the Alexander polynomial. *Annals of Mathematics. Second Series*, 57:57–89, 1953.

[440] Bruce Trace. On the Reidemeister moves of a classical knot. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 89(4):722–724, 1983.

[441] Paweł Traczyk. Periodic knots and the skein polynomial. *Inventiones mathematicae*, 106(1):73–84, 1991.

[442] Paweł Traczyk. A new proof of Markov's braid theorem. W *Knot theory (Warsaw, 1995)*, tom 42 *Banach Center Publ.*, strony 409–419. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warszawa, 1998.

[443] Paweł Traczyk. A criterion for signed unknotting number. W *Low-dimensional topology (Funchal, 1998)*, tom 233 *Contemp. Math.*, strony 215–220. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[444] James J. Tripp. The canonical genus of Whitehead doubles of a family torus knots. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 11(8):1233–1242, 2002.

[445] Andrew G. Tristram. Some cobordism invariants for links. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 66:251–264, 1969.

[446] Hale F. Trotter. Homology of group systems with applications to knot theory. *Annals of Mathematics. Second Series*, 76:464–498, 1962.

[447] Hale F. Trotter. Non-invertible knots exist. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 2:275–280, 1963.

[448] Vladimir G. Turaev. Кручение Райдемайстера в теории узлов. *Академия Наук СССР и Московское Математическое Общество. Успехи математических наук*, 41(1(247)):97–147, 1986. Dostępne tłumaczenie angielskie: Reidemeister torsion in knot theory.

[449] Vladimir G. Turaev. Операторные инварианты связок и R-матрицы. *Известия Академии наук СССР. Серия математическая*, 53(5):1073–1107, 1989. Dostępne tłumaczenie angielskie: Operator invariants of tangles, and R-matrices.

[450] Vladimir G. Turaev. *Introduction to Combinatorial Torsions*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Bazylea, 2001. Notatki spisane przez Felixa Schlenka.

[451] Paul Turner. Five lectures on Khovanov homology. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 26(3):41, 2017.

[452] Robert E. Tuzun oraz Adam S. Sikora. Verification of the Jones unknot conjecture up to 22 crossings. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 27(3):18, 2018.

[453] Robert E. Tuzun oraz Adam S. Sikora. Verification of the Jones unknot conjecture up to 24 crossings. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 30(3):6, 2021.

[454] Leandro Vendramin. On the classification of quandles of low order. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 21(9):10, 2012.

[455] Dirk Vertigan. The computational complexity of Tutte invariants for planar graphs. *SIAM Journal on Computing*, 35(3):690–712, 2005.

[456] Oleg J. Viro. Двулистные разветвленные накрывающие трехмерной сферы. W *Исследования по топологии*, tom 36, strony 6–39. Изд-во «Наука», Ленинград, 1973. Dostępne tłumaczenie angielskie: Two-sheeted branched coverings of a three-dimensional sphere w *Journal of Soviet Mathematics*, tom 8, strony 531–553, 1977.

[457] Oleg J. Viro. Remarks on definition of Khovanov homology. https://arxiv.org/abs/math/0202199, 2002.

[458] Oleg J. Viro. Khovanov homology, its definitions and ramifications. *Fund. Math.*, 184:317–342, 2004.

[459] Pierre Vogel. Representation of links by braids: a new algorithm. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 65(1):104–113, 1990.

[460] Friedhelm Waldhausen. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Annals of Mathematics. Second Series*, 87:56–88, 1968.

[461] Jeffrey Weeks. *Hyperbolic structures on 3-manifolds*. Praca doktorska, Princeton University, 1985.

[462] Jeffrey Weeks. Computation of hyperbolic structures in knot theory. W *Handbook of knot theory*, strony 461–480. Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.

[463] Noah Weinberg. О свободной эквивалентности замкнутых кос. *Доклады Академии наук. Новая серия*, 23:215–216, 1939. Dostępne tłumaczenie francuskie: Sur l'équivalence libre des tresses fermées.

[464] Dominic J. A. Welsh. On the number of knots and links. W *Sets, graphs and numbers (Budapest, 1991)*, tom 60 *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, strony 713–718. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[465] Hilmar Wendt. Die gordische Auflösung von Knoten. *Mathematische Zeitschrift*, 42(1):680–696, 1937.

[466] John H. C. Whitehead. On doubled knots. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-12(1):63–71, 1937.

[467] Wilbur Whitten. Inverting double knots. *Pacific Journal of Mathematics*, 97(1):209–216, 1981.

[468] Wilbur Whitten. Knot complements and groups. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 26(1):41–44, 1987.

[469] Norbert J. Wielenberg. Hyperbolic 3-manifolds which share a fundamental polyhedron. W *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, tom 97 *Ann. of Math. Stud.*, strony 505–513. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.

[470] Shuji Yamada. The minimal number of Seifert circles equals the braid index of a link. *Inventiones Mathematicae*, 89(2):347–356, 1987.

[471] Shuji Yamada. How to find knots with unit Jones polynomials. W *Proceedings of the conference dedicated to Professor Kunio Murasugi for his 70th birthday*, strony 355–361. Osaka University, 1999.

[472] Kenichi Yoshida. The minimal volume orientable hyperbolic 3-manifold with 4 cusps. *Pacific Journal of Mathematics*, 266(2):457–476, 2013.

[473] Don Zagier. Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function. *Topology. An International Journal of Mathematics*, 40(5):945–960, 2001.

[474] Xingru Zhang. Unknotting number one knots are prime: a new proof. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 113(2):611–612, 1991.

[475] Olof P. Östlund. Invariants of knot diagrams and relations among Reidemeister moves. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 10(8):1215–1227, 2001.

Skorowidz

Większość przymiotników, które pasują do węzłów, splotów, itd. wymieniona jest tylko raz, pod hasłem węzeł, chyba że to nie ma sensu (jak na przykład dla rozszczepialności), wtedy wymieniona jest raz, tam gdzie ma sens.

2-przejście, 27

algebra
    chińskich znaków, 106, 110
    Iwahoriego-Heckego, 139
    Jonesa, 82
    Temperleya-Lieba, 81
    Vogela, 109
algebra Clifforda, 132
algorytm
    Aharonova-Jonesa-Landaua, 81
    Seiferta, 117, 125

całka
    Eichlera, 108
    Koncewicza, 109–110
charakterystyka Eulera, 120
chirurgia Dehna, 22, 84, 113, 158, 177
chiński znak, *zob.* algebra chińskich znaków
ciało z rączkami, 125
cień, 22
CW kompleks, 19
cykle Scharlemanna, 22

defekt, 65
diagram, 22
    cięciw, 104
    spójny, 90
    z kręgosłupem, 107
    zredukowany, 90
dubel Whiteheada, 125, 170, 171
długość sznurowa, 54–55

enancjomer, 98
etykietowanie, 62

flype, 26, 27, 32
foliacja, 142
formuła Seiferta-Torresa, 167
funkcja Rademachera, 50
fuzja splotu, 41

genus, 32, 51, 79, 97, 104, 119–126, 160, 166
    kanoniczny, 125
    plastrowy, 156
    wolny, 125
graf Seiferta, 126, 145
grupa
    Burnside'a, 50
    kolorująca, 66–68
    Picarda, 175
    podstawowa, 24, 36, 39
    warkoczy, 140

węzła, 111
zgodności, 182
grupoid rozdzielny, *zob.* kwandel

hiperboliczna transformacja splotu, 41
hipoteza
Bernharda-Jablana, 49
geometryzacyjna Thurstona, 172
Knesera, 114
Lin-Wanga, 103
Milnora, 166
mostowo-skrzyżowaniowa, 51
o indeksie skrzyżowaniowym, 46
o liczbie gordyjskiej, 48, 155
o wielomianie Jonesa i niewęźle, 85
plastrowo-taśmowa, 18, 183
Poincarégo, 19
Smitha, 38
Taita, 21, 32–33, 36, 52, 90–94
pierwsza, 94
trapezoidalna, 81
homologia, 39, 99
Chowanowa, 32, 39, 85, 132–135
druga grupa homologii, 116
Floera, 5, 6, 39, 122, 135, 155
homotopia, 182

indeks
Masłowa, 50
Nakanishiego, 49
skrzyżowaniowy, 32, 46, 63, 98, 104, 122, 167, 174
warkoczowy, 104, 122, 167
zaczepienia, 52–53
indeks nawinięcia, 24
izotopia, 182
izotopia otaczająca, 17

kabel, 162
kei, *zob.* kwandel inwolutywny
klamra Kauffmana, 82–90, 167
kocykl Meyera, 50
kohomologia
Čecha, 116
kolorowalność, 57–62, 159
kolorowanie, 50
komputer
Cray, 27
kryterium Naika (okresowości), 39
kwandel, 69–72
Alexandera, 71
cykliczny, 70
diedralny, 70
inwolutywny, 71
podstawowy, 71
sprzężony, 70
spójny, 71
symplektyczny, 71

lemat Hadamarda, 18
liczba
gordyjska, 46–51, 104, 129, 166, 181
mostowa, 50–51, 79, 97, 104, 128, 167
węzeł trzymostowy, 51
patykowa, 53–54
Taita, 52
warkoczowa, 144–145
lustro, 35, 76, 87, 98, 129

macierz
Goeritza, 65–66
Jacobiego, 80
kolorująca, 62–66
Seiferta, 126–128, 154, 182
S-równoważność, 127
zerowo kobordantna, 182
unimodularnie sprzężona, 182
makaron i widelce, 139
mutacja, *zob.* mutant
mutant, 97, 98, 152–156, 174, 175

nadskrzyżowanie, 22
nakrycie, 99
nierówność
Mortona, 125
Mortona-Franksa-Williamsa, 145
niesplot, 18
niewęzeł, 31
Freedmana, 32
Goeritza, 32
niezmiennik
μ Milnora, 18
Arfa, 103, 131–132, 161, 162, 180
Cassona, 103, 155
Cassona-Gordona, 39
Reszetichina-Turajewa, 84

Wasiljewa, 100–110, 152
rząd …, 102
symbol …, 105
Wittena, 155
zliczający, 70
niezmienniki torsyjne, 24
nieściśliwy, 156
nić, 22
notacja
Alexandera-Briggsa, 30–31
Conwaya, 31
Dowkera-Thistlethwaite'a, 29–30
Gaußa, 29
Taita, 29

objętość
hiperboliczna, 175–178
symplicjalna Gromowa, 155
obramowanie, *zob.* węzeł obramowany
ogniwo, 98
okres, 165
orbifold, 164, 171
orientacja, *zob.* węzeł zorientowany

para Perko, 27, 30, 33, 52, 176
parowanie Blanchfielda, 49
pasmo warkocza, 139
pierścienie Borromeuszy, 19, 20, 31, 50, 59
pięciolistnik, 31
plumbing, 41
pochodna Foxa, 79–80
podskrzyżowanie, 22
porządek Dehornoya, 143
postać normalna
Conwaya, 150
Schuberta, 150
powierzchnia, 116
orientowalna, 117
Seiferta, 73, 117, 120
południk, 116
precel, 51, 125, 156–160, 183
(-2, 3, 7), 158, 177
(-2, 3, 8), 178
prezentacja
Coxetera grupy symetrii, 141
Wirtingera, 62, 114–116
problem małżeństw przy stole, 30
program SnapPy, 49, 177
przesmyk, 41, 90
przestrzeń
Seiferta-Webera, 31
soczewkowa, 24, 150
włóknista Seiferta, 171
przeszkoda Lickorisha, 49
półka, 72

rachunek Kirby'ego, 84
relacja kłębiasta, 77, 86, 88, 95, 98, 129
relacje 1T i 4T, 106
reprezentacja
Burau-Squiera, 50
Buraua, 142
Lawrence'a-Krammera-Bigelowa, 139
motylkowa, 51
rewers, 35, 76, 86, 129
rozgałęzione nakrycie, 39
rozkład Heegaarda, 24
rozkład Jaco-Shalena-Johannsona, 171, 172
rozmaitość
atoroidalna, 171
Giesekinga, 176
Hakena, 31, 112, 113, 171–173
hiperboliczna, 172
Meyerhoffa, 178
Seiferta, 156
szwowa, 48, 135, 183
toroidalna, 172
Weeksa, 177
włóknista Seiferta, 172
ściągalna, 19
rozpiętość wielomianu, 93
ruch
Ω, 101
Kirby'ego, *zob.* rachunek Kirby'ego
Reidemeistera, 23, 69, 70, 101, 147
równanie
kolorujące, 58, 74
Yanga-Baxtera, 147

S-równoważność (macierzy Seiferta), 127
satelita, 169
Schlauchknoten, 81
skrzyżowanie, 19, 22
… wygładzenie, 52

dodatnie i ujemne, 52
lewo- i prawoskrętne, 52
SnapPea, 175
soczewka, *zob.* przestrzeń soczewkowa
spin, 24, 27, 32, 52, 84
splot, 18
atoroidalny, 122, 170
Brunna, 20
Hopfa, 18, 31, 50, 53, 85
lokalnie trywialny, 122
Montesinosa, 156–158, 173
Neuwirtha, 118
prosty, 122
rozszczepialny, 19, 41, 59, 64, 78, 113, 172–174
sznurkowy, 110
Whiteheada, 19, 31, 53, 177, 178
stan diagramu, 90
wzbogacony, 134
suma Murasugiego, 41
suma niespójna, 39, 88
suma paskowa, 41
suma spójna, 39, 46, 54, 88, 119, 174, 182
supeł, 21, 145–156
wymierny, 51
sygnatura, 39, 87, 104, 128–131, 160, 165, 180, 181
Levine'a-Tristrama, 49, 130, 155
szpic, 177, 178
sztuczka Alexandera, 17
szwindel Mazura, 40
ślad Markowa, 82

tablica rzeczywistości, 106
teoria Cerfa, 22
torus nieściśliwy, 171
torus połykająco-podążający, 169
towarzysz, 169
właściwy, 170
trik Kauffmana, 84
trójkolorowalność, 57
trójlistnik, 31
twierdzenie
Alexandera, 82, 141
Donaldsona, 180
Gordona-Lueckego, 22
Markowa, 82, 141
Mostowa-Prasada, 175
o pętli, 113
o sferze, 113
o sztywności, 175
Reidemeistera, 24, 101
Thurstona, 172
twierdzenie Gruszko o randze wolnego produktu, 119

układ ciężarów, 106
uszachowienie, 60, 65
standardowe, 92
ułamek supła, 149, 150

warkocz, 50, 72, 78, 110, 139–145
czysty, 140
domknięcie warkocza, 141
kwazitoryczny, 141
toryczny, 141, 163
warunek
Foxa-Milnora, 180
Murasugiego, 38
Torresa, 81
wielomian
Alexandera, 32, 41, 61, 73–81, 118, 119, 121, 128–130, 145, 154, 159, 161, 162, 167
skręcony, 39
BLM/Ho, 41, 98–100, 154
Conwaya, 103, 181
HOMFLY, 154
HOMFLY-PT, 39, 95–98
Jonesa, 32, 39, 81–90, 100, 103, 110, 154, 167, 181
powiększony, 133
kablowy, 154
Kauffmana, 99–100, 154
z Dubrownika, 100
wielomian Alexandera, 132
wielomian Jonesa, 132
wierzchołek (węzła osobliwego), 101
wiązka (S^1), 171
wrak, 72
wrzeciono, 72
wygładzenie, 90
wyznacznik, 63–64, 67, 98, 127, 130, 159, 180
wzorzec, 169
wzór

fuzyjny Masbauma-Vogela, 156
Hirzebrucha, 165
kablowy, 154
Nowikowa-Walla, 50
o sumowaniu stanów, 91
węzeł, 16
achiralny, 129, 142
adekwatny, 46, 85
algebraiczny, *zob.* drzewiasty, 162
alternujący, 19, 20, 41, 46, 79, 85, 125, 173
babski, 31
bilardowy, 163
chiralny, 36
Conwaya, 31, 152, 154, 179
dodatni, 85
dokerski, 31
drzewiasty, 20
dwumostowy, 41, 99, 125, 149–152, 162, 181, 183
dziki, 16
długi, 16
Fintushela-Sterna, 31
hiperboliczny, 20, 97, 171–178
ilorazowy, 38
jednorodny, 125
kablowy, 170, 171
Kinoshity-Terasakiego, 31, 152, 154
Lissajous, 160–163
lustrzany, 35
niewidzialny, 59, 64
niezorientowany, 71
o 75 skrzyżowaniach, 98
obramowany, 16, 71, 72
odwracalny, 36, 157
odwrotny, 35, 109
okresowy, 37–39, 160, 163
osobliwy, 100
pierwszy, 19, 41–42, 99, 123, 124, 173, 174
plastrowy, 39, 41, 179, 181–183
poskromiony, 17
prawie alternujący, 85, 173
preclowy, *zob.* precel
póładekwatny, 85
regularny, 174
rozwłókniony, 97, 118–119, 161, 162
satelitarny, 85, 131, 156, 162, 169, 172, 174
silnie dodatnio achiralny, 160
skręcony, 30, 48, 118, 162, 181
skrętny, *zob.* węzeł chiralny
Solomona, 31
taśmowy, 97, 163, 183
toroidalnie alternujący, 173
torusowy, 30, 46, 48, 158, 162–169, 172
trzymostowy, 51
see liczba mostowa, 51
wirtualny, 16
wymierny, 47, *zob.* węzeł dwumostowy
włóknisty, *zob.* węzeł rozwłókniony
zespawany, 16
zgodny, 41, *zob.* zgodność
zorientowany, 23
zwierciadlany, 33, 36, 87, 157
złożony, 41
włókno, 22

zbiór automorficzny, *zob.* kwandel
zgodność, 181
znak skrzyżowania, 52
złączanie (splicing), 171

ósemka, 31, *zob.* węzeł 4-1

ślad Ocneanu, 139

Indeks osób

Te wystąpienia nazwisk, gdzie chodziło o autora klasycznych podręczników, pominięto.

Adams, Colin, 22, 48, 54, 173, 176
Agol, Ian, 178
Alexander, James, 17, 24, 27, 78, 80, 141
Arf, Cahit, 131
Arnold, Brian, 27
Artin, Emil, 139, 140
Askitas, Nikos, 50
Au, Michael, 27
Aumann, Robert, 164

Bacardit, Lluís, 143
Bae, Yongju, 159
Bankwitz, Carl, 63, 159
Bar-Natan, Dror, 100, 103, 106, 108–110, 133, 134
Bass, Hyman, 38
Benedetti, Riccardo, 175
Berger, Andrew, 69
Bernhard, James, 49
Bigelow, Stephen, 142, 144
Birman, Joan, 104, 139, 140, 142
Blair, Ryan, 51
Blanloeil, Vincent, 181
Bleiler, Steven, 49
Bogle, Miles, 160
Bohnenblust, Frederic, 140
Boileau, Michel, 173
Bollobás, Béla, 107
Bonahon, Francis, 27, 157
Borodzik, Maciej, 39, 49, 165
Brandt, Robert, 98
Brendle, Tara, 139
Brennan, Bevin, 54
Brieskorn, Egbert, 69, 165
Briggs, Garland, 24, 27
Brittenham, Mark, 49, 125
Brock, Jeffrey, 173
Brownell, Kathryn, 160
Brunn, Hermann, 20
Budney, Ryan, 31
Bugbee, John, 173
Burau, Werner, 142
Burde, Gerhard, 24, 164
Burgiel, Heidi, 20
Burton, Benjamin, 28, 31, 32

Calvo, Jorge, 54
Candy, Christoper, 27
Cantarella, Jason, 55
Cao, Chun, 177
Casson, Andrew, 182
Caudron, Alain, 27, 28
Cerf, Corinne, 28
Cha, Jae, 48
Chang, Hsien-Chih, 32
Chen, Haimiao, 39
Chen, Qi, 50
Chow, Wei-Liang, 140, 141

Chowanow, Michaił (Хованов, Михаил Гелиевич), 133
Clark, William, 71
College, Pitzer, 22
Comar, Timothy, 173
Conway, John, 21, 27, 28, 50, 69, 78, 130, 145
Cooper, Daryl, 155
Coward, Alexander, 25, 48
Coxeter, Harold, 50
Crans, Alissa, 72
Crawford, Thomas, 22
Cromwell, Peter, 125, 153
Crowell, Richard, 63, 125
Culler, Marc, 21
Cygan, Szymon, 68
Czmutow, Siergiej (Чмутов, Сергей Владимирович), 100, 103, 104, 107–110, 147

Dasbach, Oliver, 85, 108, 109
Davis, James, 38
Dehn, Max, 79, 87, 111
Dehornoy, Patrick, 143
DeMeo, Benjamin, 22
Denne, Elizabeth, 55
Diao, Yuanan, 46, 55
Dicks, Warren, 143
Dionísio, Miguel, 71
Doll, Helmut, 28
Dowker, Clifford, 27, 29
Dunfield, Nathan, 98
Dużin, Siergiej (Дужин, Сергей Васильевич), 100, 107–110, 147
Dyer, Joan, 143
Dąbkowski, Mieczysław, 50

Eisenbud, David, 162
Elhamdadi, Mohamed, 71
Eliahou, Shalom, 85
Elrifai, Elsayed, 54
Epple, Moritz, 31
Erdener, Kaan, 27
Ernst, Claus, 41, 151
Ewing, Bruce, 153

Fadell, Edward, 140, 143
Faigin, Keith, 173
Fan, James, 27
Faullin, Dylan, 28
Fenn, Roger, 69, 143
Feustel, Charles, 170
Fintushel, Robert, 31
Flannery, Brandon, 69
Flint, Ortho, 28
Flynn, Richard, 27
Fomenko, Anatolij (Фомеенко, Анатоолий Тимофеевич), 177
Fontaine, Bruce, 28
Fox, Ralph, 20, 36, 51, 80, 81, 140, 158, 179, 183
Franks, John, 145
Franzblau, Deborah, 20
Freedman, Michael, 20, 32, 180
Freyd, Peter, 95
Friedl, Stefan, 49, 118
Fukuhama, Satoshi, 51
Futer, David, 171, 176, 177

Gabai, David, 125, 152, 177
Gambaudo, Jean-Marc, 50
Garoufalidis, Stavros, 98, 158
Garside, Frank, 141, 143
Gauß, Carl, 29, 52
Gerig, Chris, 69
Ghiggini, Paolo, 122
Ghys, Étienne, 50
Gibson, William, 48
Gilbert, Edgar, 30
Giller, Cole, 129
Gilmer, Patrick, 130
Goeritz, Lebrecht, 32, 65, 66
Goldman, Jay, 145
Gompf, Robert, 180, 183
González-Meneses, Juan, 139
Gordon, Cameron, 21, 22, 48, 113, 155, 165, 182
Greene, Joshua, 20, 32, 143, 183
Greilsheimer, Deborah, 54
Gruber, Hermann, 46
Gunn, Charles, 20
Gusarow, Michaił (Гусаров Михаил Николаевич), 100
Gutschera, Kevin, 20

Hagge, Tobias, 25
Haken, Wolfgang, 31
Hartley, Richard, 37, 64
Haseman, Mary, 27, 146
Hashizume, Yoko, 124
Hass, Joel, 25
Hayashi, Chuichiro, 25
He, Zheng-Xu, 32
Hearst, John, 160
Hermiller, Susan, 49
Hilden, Hugh, 51
Hillman, Jonathan, 39, 81
Hirasawa, Mikami, 118
Hirzebruch, Friedrich, 165
Ho, Chi-Fai, 98
Hodgson, Craig, 177
Hopf, Heinz, 18
Hosokawa, Fujitsugu, 75
Hoste, Jim, 22, 27, 28, 85, 95, 162, 169
Hougardy, Stefan, 85
Huh, Youngsik, 54
Huston, Amy, 173

Ishikawa, Masaharu, 48

Jablan, Slavik, 28, 49
Jabuka, Stanisław, 39, 183
Jaco, William, 171
Janiak-Osajca, Agnieszka, 145
Jensen, Jacqueline, 125
Jiang, Boju, 182
Jin, Gyo, 54
Johannson, Klaus, 171
Jones, Vaughan, 81, 89, 160, 163
Joseph, Anne, 173
Joyce, David, 69, 71

Kalfagianni, Efstratia, 171, 176, 177
Kanenobu, Taizo, 47–49, 97, 99
Kassel, Christian, 139
Kaszajew, Rinat (Кашаев, Ринат Мавлявиевич), 176
Kauffman, Louis, 32, 46, 82, 85, 90, 99, 132, 145
Kawauchi, Akio, 126
Kervaire, Michel, 116
Kidwell, Mark, 99
Kim, Hyoung-Seok, 54
Kim, Paik Kee, 48
Kim, Taehee, 118
Kinoshita, Shinichi, 76, 152
Kirby, Rob, 156
Kirk, Paul, 155
Kirkman, Thomas, 26
Kjuchukova, Alexandra, 51
Klotz, Alexander, 55
Kneissler, Jan, 109
Kneser, Hellmuth, 111
Kneser, Martin, 66
Ko, Ki, 140
Kobayashi, Masako, 126
Kobayashi, Tsuyoshi, 48, 126
Kodama, Kouzi, 178
Kohn, Peter, 47, 49
Kohno, Toshitake, 110
Koncewicz, Maksim, 108, 109
Koseleff, Pierre-Vincent, 163
Koutschan, Christoph, 158
Krammer, Daan, 144
Kronheimer, Peter, 134
Kuperberg, Greg, 134
Kusner, Robert, 55
Kyle, Roger, 66

Lackenby, Marc, 25, 32, 46, 48, 174
Lagarias, Jeffrey, 25
Lambropoulou, Sofia, 142, 145
Lamm, Christoph, 163
Lando, Siergiej (Ландо, Сергей Константинович), 108
Landry, Michael, 22
Lee, In, 159
Lee, Sang, 140
Levine, Jerome, 127, 130, 182
Lickorish, William, 46, 48, 85, 95, 98, 100, 154, 155
Lin, Alex, 22
Lin, Xiao-Song, 103, 104
Lipson, Andrew, 89, 154
Lisca, Paolo, 183
Listing, Johann, 29
Litherland, Richard, 131, 165
Little, Charles, 26, 27, 31
Livingston, Charles, 38, 39, 48, 130, 156, 182, 187, 263
Lombardero, David, 27

Long, Darren, 142
Lopes, Pedro, 71
Lowrance, Adam, 85
Luecke, John, 21, 22, 48, 113, 155
Löffler, Maarten, 32

Magnus, Wilhelm, 140, 144
Malcew, Anatolij (Анатолий Иванович Мальцев), 144
Maldonado, Matthew, 55
Malutin, Andriej, 46, 174
Manturow, Wasilij, 25, 141
Marché, Julien, 110
Maria, Clément, 32
Markow, Andrej (Марков, Андрей Андреевич), 142
Masai, Hidetoshi, 177
Masbaum, Gregor, 156
Matei, Daniel, 152
Matwiejow, Siergiej (Матвеев, Сергей Владимирович), 69, 177
Maxwell, James, 24
McCabe, Cynthia, 54
Melvin, Paul, 108
Menasco, William, 26, 33, 41, 99, 142, 173
de Mesmay, Arnaud, 32
Meyerhoff, Robert, 177
Millett, Kenneth, 95, 98, 153
Milley, Peter, 177
Milnor, John, 18, 20, 41, 129, 179
Miyazawa, Yasuyuki, 48, 99
Montee, Murphy, 22
Montesinos, José, 37, 50, 51, 156
Moody, John, 142
Moore, Allison, 187, 263
Morgan, John, 38
Moriah, Yoav, 125
Morton, Hugh, 108, 125, 141, 142, 145, 153, 154
Mostovoy, Jacob, 100, 109, 147
Mostow, George, 175
Mrówka, Tomasz, 134
Muir, Robs, 27
Murakami, Hitoshi, 47–49, 89
Murakami, Jun, 153
Murasugi, Kunio, 24, 32, 36, 38, 41, 46, 51, 81, 95, 125, 127, 128, 132, 164, 165, 167
Musick, Chad, 51

Naik, Swatee, 39
Nakamura, Takuji, 125
Nakanishi, Yasutaka, 47–50
Negami, Seiya, 54
Nelson, Sam, 69, 102
Neumann, Walter, 162, 177
Neuwirth, Lee, 140, 143, 164
Ng, Ka, 107
Niebrzydowski, Maciej, 71
Nielsen, Jakob, 164

O'Neil, Kaitlyn, 160
Obermeyer, Daniel, 163
Ocneanu, Adrian, 95
Oh, Seungsang, 54
Ohtsuki, Tomotada, 155
Ohyama, Yoshiyuki, 109, 145
Oleszkiewicz, Krzysztof, 165
Oshikiri, Tokio, 50
Ost, Eric, 187
Owens, Brendan, 48
Oyamaguchi, Natsumi, 102
Ozawa, Makoto, 51
Ozsváth, Peter, 48, 81, 122

Papakyriakopoulos, Christos, 111
Park, Seojung, 22
Paton, Mark, 142
Pecker, Daniel, 163
Perelman, Grigorij, 172
Perko, Kenneth, 27, 115
Pesikoff, David, 173
Petronio, Carlo, 32, 175
Pettersson, William, 31
Piccirillo, Lisa, 179
Pogoda, Zdzisław, 145
Politarczyk, Wojciech, 39
Polyak, Michael, 24, 103
Polyak, Michael (Поляк, Михаил?), 103
Prasad, Gopal, 175
Prasołow, Wiktor (Прасолов, Виктор Васильевич), 24
Przytycki, Józef, 39, 45, 50, 71, 89, 95, 134, 154, 163
Puppe, Dieter, 66
Purcell, Jessica, 171, 176, 177

Randell, Richard, 53, 54
Rankin, Stuart, 28
Rasmussen, Jacob, 166
Reidemeister, Kurt, 23, 24, 27
Reszetichin, Nikołaj (Решетихин, Николай Юрьевич), 84
Riley, Robert, 152, 171, 172, 178
Riordan, Oliver, 107
Robertello, Raymond, 131
Rolfsen, Dale, 30, 143, 155
Rourke, Colin, 69, 142, 143
Ruberman, Daniel, 153, 155, 174
Rubinstein, Joachim, 31

Saito, Masahico, 71
Sakai, Tsuyoshi, 37
Sakuma, Makoto, 76, 178
Sazdanovic, Radmila, 102
Scharlemann, Martin, 48, 183
Schermann, John, 28
Schieber, Nathaniel, 147
Schleimer, Saul, 32
Schreier, Otto, 139
Schubert, Horst, 31, 35, 39, 50, 51, 123, 124, 139, 145, 167, 170
Schultens, Jennifer, 51
Schumann, Hans, 159
Sedgwick, Eric, 32
Seifert, Herbert, 76, 117, 162
Shalen, Peter, 21, 171
Shimizu, Ayaka, 50
Shinohara, Yaichi, 130, 131
Shonkwiler, Clayton, 54
Siebenmann, Laurent, 27, 173
Sikora, Adam, 27, 85
Skora, Richard, 20
Sosiński, Aleksiej (Сосинский, Алексей Брониславович), 24
Spreer, Jonatha, 32
Spyropoulos, Dean, 85
Stallings, John, 119, 164
Stanford, Ted, 109
Stern, Robert, 31
Stoiłow, Luben, 160
Stojmenow, Aleksander, 48, 49, 64, 85, 94, 99, 103, 105, 107, 118, 125, 130, 152, 156
Stojmenow, Alexander, 42
Sullivan, John, 20, 55
Sumners, De Witt, 41, 151
Sumnicht, Christopher, 69
Sundberg, Carl, 21
Szabó, Zoltán, 48, 81, 122
Szumakowicz, Aleksander, 98, 133

Taalman, Laura, 160
Tait, Peter, 24–26
Takasaki, Mituhisa, 72
Tamura, Junya, 50
Tanaka, Toshifumi, 48, 152
Taniyama, Kouki, 47
Teichner, Peter, 183
Tejada, Débora, 51
Teragaito, Masakazu, 51
Terasaka, Hidetaka, 76, 152
Thistlethwaite, Morwen, 21, 26–29, 32, 33, 46, 62, 85, 98, 99, 169
Thompson, Abigail, 48, 183
Thomson, William (lord Kelvin), 25
Thurston, Dylan, 176
Thurston, William, 31, 113, 171, 172, 175
Tietze, Heinrich, 21
Tillman, Stephan, 31
Tollefson, Jeffrey, 48
Toro, Margarita, 51
Torres, Guillermo, 81
Trace, Bruce, 24
Traczyk, Paweł, 39, 48, 95, 142, 154
Tripp, James, 125
Tristram, Andrew, 130
Trotter, Hale, 36, 65, 127, 128, 158
Turajew, Władymir (Тураев, Владимир Георгиевич), 84, 139, 146
Turner, Paul, 133
Tutte, William, 21
Tuzun, Robert, 27, 85

van Buskirk, James, 140
Velazquez, Roman, 51
Vendramin, Leandro, 71
Venkatesh, Saraswathi, 22
Vertigan, Dirk, 134
Villanueva, Paul, 51
Viro, Oleg, 103, 133
Vogel, Pierre, 141, 156

Waldhausen, Friedhelm, 113, 143, 164, 171

Wang, Zhenghan, 32, 103
Warczenko, Aleksander (Варченко, Александр Николаевич), 108
Wasiljew, Wiktor (Васильев, Виктор Анатольевич), 100, 109
Weber, Claude, 26
Weeks, Jeff, 28, 85, 169, 171
Weeks, Jeffrey, 177
Weinberg, Noah (Вайнберг, Ной Моисеевич), 142
Welsh, Dominic, 42
Wendt, Hilmar, 47
Whitehead, John, 19, 22, 76
Whitney, Hassler, 63
Whitten, Wilbur, 37, 113, 170
Wielenberg, Norbert, 175
Wiest, Bertold, 143
Williams, Robert, 145
Wirtinger, Wilhelm, 115
Woo, Alexander, 54
Wraith, Gaven, 69
Wu, Danny, 27

Yamada, Shuji, 85, 122, 141
Yasuhara, Akira, 48
Yeatman, Timothy, 71
Yetter, David, 95
Yhee, Farrah, 22
Yoshida, Kenichi, 178

Zagier, Don, 108, 177
Zanellati, Adolfo, 32
Zhang, Xingru, 48
Zieschang, Heiner, 24, 164
Zirbel, Laura, 162

Östlund, Olof, 25

Wykaz małych węzłów i splotów

precel
(-2, 3, 7), 176

węzeł
10-123, 161
10-71, 98
10-8, 49
10-99, 161
10a103, 161
10a121, 161
12a1019, 161
12a1105, 161
12a1202, 161
12a427, 161
12a435, 161
12n-242, 176
12n-288, 49
12n-491, 49
12n-501, 49
12n706, 161
13n-3370, 49
14-36750, 49
14-36760, 49
4-1, 171, 177
8-14, 49
9-42, 98
Conwaya, 171
Kinoshity-Terasakiego, 171